

学三真题

2011 年考研数

一、选择题

无穷小, 则 1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 5\sin x - \sin 5x - kx$ 是无穷

4 A $k=1, c=4$ B $k=a, c=-4$ C $k=3, c=4$ D $k=3, c=-$

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$

A $-2f'(0)$ B $-f'(0)$ C $f'(0)$ D 0

3. 设 $\{U_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

A 若 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (U_{2n-1} + U_{2n})$ 收敛

B 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (U_{2n-1} + U_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛

C 若 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (U_{2n-1} - U_{2n})$ 收敛

D 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (U_{2n-1} - U_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛

是 4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ 则 I 、 J 、 K 的大小关系

A $I < J < K$ B $I < K < J$ C $J < I < K$ D $K < J < I$

负 B 5. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交

, 则 的第二行与第一行得单位矩阵。记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A =$

A $P_1 P_2$ B $P_1^{-1} P_2$ C $P_2 P_1$ D $P_2^{-1} P_1$

生无 6. 设 A 为 4×3 矩阵, $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性

无关的解, $k_1 k_2$ 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为

- 1) $B \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1)$ $A \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$
 $+ k_2(\eta_2 - \eta_1)$ $D \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_3(\eta_3 - \eta_1) + k_3(\eta_2 - \eta_1)$ $C \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1)$

两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续率密度的是

- $(x)F_2(x)$ $C f_1(x)F_2(x)$ $D f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

人参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 泊松分布 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体的

则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$

- DT_2 $B ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

- DT_2 $D ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

7. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为函数，则必为概

- $A f_1(x)f_2(x)$ $B 2f_2$

8. 设总体 X 服从

简单随机样本，

- $A ET_1 > ET_2, DT_1 > 1$

- $C ET_1 < ET_2, DT_1 > 1$

二、填空题

$1 + 3t)^{\frac{x}{t}}$ ，则 $f'(x) =$ _____

$\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$ ， $dz|_{(1,0)} =$ _____

$\frac{\pi}{4} = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____

1，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所

9. 设 $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$

10. 设函数 $z = (1 + \sqrt{x^2 + y^2})^2$

11. 曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$

12. 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$

_____ 成的旋转体的体积

_____ 13. 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

正交变换下 $x = Qy$ 的标准为 _____

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ ，则 $E(XY^2) =$ _____

三、解答题

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$

, $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值,

16. 已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数

$z = f[(x+y), f(x,y)]$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$

17. 求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$

。

18. 证明 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有 2 实根

$f'(x+y)dxdy = \iint_{D_1} f'(x+y)dxdy$,

19. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的导数, $f(0)=1$, 且 $\iint_{D_1}$

$D_1 = \{(x,y) | 0 \leq y \leq t, 0 \leq x \leq t\} (0 \leq t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

, $\beta_2 = (1,2,3)^T$,

20. $\alpha_1 = (1,0,1)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (1,3,5)^T$ 不能由 $\beta_1 = (1,a,1)^T$

, α_3 线性表出。

$\beta_3 = (1,3,5)^T$ 线性表出, ①求 a ; ②将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 α_1, α_2

21. A 为三阶实矩阵, $R(A)=2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的特征值与特征向量; (2) 求 A 。

22.

1
2/3

X	0	
P	1/3	

1
1/3

Y	-1	0	
P	1/3	1/3	

$P(X^2=Y^2)=1$

求 $(1) \text{ } \alpha, \beta$ 的相互关系; (2) α, β 的相互关系; (3) P_{XY}

23. (X, Y) 在 G 上服从均匀分布, G 由 $x-y=0$, $x+y=2$ 与 $y=0$ 围成。

(1) 求边缘密度 $f_X(x)$; (2) 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

答案:

一选择题

CBABBCDD

二填空题

9. $e^{3x}(1+3x)$ 10. $(\ln 2 + \frac{1}{2})dx - (\ln 2 + \frac{1}{2})dy$ 11. $2x+y=0$

12. $\frac{4}{3}\pi$ 13. $3y_1^2$ 14. $\mu(\sigma^2 + \mu^2)$

三解答题

15.解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} - 1}{2x} = \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{2x} = -\frac{1}{2}$

16.解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1[x+y, f(x, y)] + f_2[x+y, f(x, y)]f_1'(x, y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

由于 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值, 可知 $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=0$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = f_{(1,1)}'[2, f(1,1)] + f_2'[2, f(1,1)]f_{1,2}'(1,1) = f_{1,1}''(2,2) + f_2'(2,2)f_{1,2}''(1,1)$

20.解:

$$1) \because |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$$

得 $a=1$ 又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, $\therefore r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < 3$, 于是 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 0$, 解

$$2) (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \text{ 于是 } \begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 \\ \beta_3 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

21.解:

1)

$$\text{令 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 则 } A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2,$$

$\alpha_2 = 1$, 对应的线性无关的特征向量为

根据特征值向量的定义, A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 为矩阵 } A \text{ 的相应于 } \lambda_3 = 0 \text{ 的特征向量, } A \text{ 为实矩阵, 所以有 } \alpha_2^T \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2^T \alpha_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 \Rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是 } A \text{ 的 } Q \text{ 满足 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22.解:

$$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$$

$$\therefore P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}, \text{同理如图:}$$

0	1	
1/3	0	1/3
0	1/3	1/3
1/3	1/3	

Y	-1	
X	0	
0	1/3	
1	1/3	

2) Z取值为-1, 0, 1

$$P(XY=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1)$$

$$P(XY=-1) = P(X=1, Y=-1) = \frac{1}{3},$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$P(X=0, Y=-1) = P(X=0, Y=1)$$

$$P(XY=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}$$

	1
	1/3

Z	-1	0
P	1/3	1/3

23.解: 如图

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$1) x < 0 \text{ 或 } x > 2, f_X(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1, f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 1 dy = x$$

$$1 < x < 2, f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 1 dy = 2 - x$$

$$\text{综上所述, } f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$2) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$\text{当 } y > 1 \text{ 或 } y < 0, f_Y(y) = 0; \text{ 当 } 0 \leq y \leq 1, f_Y(y) = \int_y^{2-y} 1 dx = 2 - 2y$$

$$\text{综上, } f_{X|Y}(X|Y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2y} & (x, y) \in G \\ 0 & (x, y) \notin G \end{cases}$$