

2011 考研数学一真题试卷

一选择题

1. 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^2$ 拐点

A (1, 0) B (2, 0) C (3, 0) D (4, 0)

2 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k (n=1,2,\dots)$ 无界, 则幂级数

$\sum_{k=1}^n a_k (x-1)^n$ 的收敛域

A(-1,1] B[-1,1) C[0,2) D(0,2]

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) > 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 (0, 0) 处取得极小值的一个充分条件

A $f(0) > 1, f''(0) > 0$ B $f(0) > 1, f''(0) < 0$

C $f(0) < 1, f''(0) > 0$ D $f(0) < 1, f''(0) < 0$

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ 则 I, J, K 的大小关系是

A $I < J < K$ B $I < K < J$ C $J < I < K$ D $K < J < I$

5. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的

第二行与第一行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $A =$

A PP_2 B $P_1^{-1}P_2$ C P_2P_1 D $P_2^{-1}P_1$

6. 设 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为

A a_1, a_3 B a_1, a_2 C a_1, a_2, a_3 D a_2, a_3, a_4

7. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续

函数, 则必为概率密度的是

A $f_1(x)f_2(x)$ B $2f_2(x)F_2(x)$ C $f_1(x)F_2(x)$ D $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8. 设随机变 X 与 Y 相 , 且 EX 与 EY 在 , 记

$U=\max\{x,y\}, V=\{x,y\}$, 则 $E(UV)=$

A $EUEV$ B $EXEY$ C $EUEY$ D $EXEV$

二

9. 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$ 的 $S =$ _____

10. 分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 条件 $y(0)=0$ 的解为 $y =$ _____

11. 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0} =$ _____

12. 设 L 是 方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $z = x + y$ 的交线, z _____ z

_____ 为 方 , 则曲线 分 $\oint xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____

13. 若二 曲 的方程为 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$, _____ 交变换

为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____

解

15 极 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

16 设 $z = f(xy, yg(x))$, 其 函数 f 具有二阶连续 导数, 函数 $g(x)$ 可

导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1}$

17 方程 $k \arctan x - x = 0$ _____ 的个数, 其 k 为 数。

18 1) _____ 数 n , 有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n=1, 2, \dots)$, $\{a_n\}$ 收敛。

19. 函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)dxdy=a$ ，其 $D=\{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，

二分 $I = \iint_D xy \int_{xy}''(x,y)dxdy$ 。

20. $a_1=(1,0,1)^T, a_2=(0,1,1)^T, a_3=(1,3,5)^T, b_1=(1,a,1)^T, b_2=(1,2,3)^T, b_3=(1,3,5)^T$ 线， $\bullet a$ ，将 b_1, b_2, b_3 线 a_1, a_2, a_3 线。

21. A 为 阶 矩阵， $R(A)=2$ ，且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A 的 值与 (2) A 。

22.

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$P(X^2=Y^2)=1$$

(1) (X, Y) 的分布 (2) $Z=XY$ 的分布 (3) r_{XY}

23. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 $N(m_0, s^2)$ 的 单随机 本，其 m_0 ， $s^2 > 0$ ， $\bar{x}$ s^2 分 本 值 本方。

1) 数 s^2 的 s^2

2) $E(s^2)$ $D(s^2)$

答案:

CCABDDDB

填空题:

9. $\ln(1+\sqrt{2})$ 10 $y = e^{-x} \sin x$ 11 4 12 p 13 $a=1$ 14 $m(m^2+s^2)$

15 解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\frac{\ln(1+x)-x}{x})^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}]^{\frac{1}{e^{x-1}} \frac{\ln(1+x)-x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}} = e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$

16 由 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取极值 $g(1)=1$ 所以 $g'(1)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1[xy, yg(x)]y + f_2[xy, yg(x)]yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1[xy, yg(x)] + y[xf_{11}''(xy, yg(x)) + g(x)f_{12}''(xy, yg(x))]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_x'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1)$$

17 解:

$$\text{令 } f(x) = k \arctan x - x$$

$$f'(x) = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$$

(1) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$ (除去可能一点外 $f'(x) < 0$), 所以 $f(x)$ 单调减少, 又因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以方程只有一个根。

(2) 当 $k-1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{k-1}$,

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{k-1})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1})$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $x = -\sqrt{k-1}$ 为极小点, $x = \sqrt{k-1}$ 为极大点

极小值为 $-k \arctan \sqrt{k-1} + \sqrt{k-1}$, 极大值为 $k \arctan \sqrt{k-1} - \sqrt{k-1}$,

令 $\sqrt{k-1} = t$, 当 $k > 1$ 时, $t > 0$, 令 $g(t) = k \arctan \sqrt{k-1} - \sqrt{k-1} = (1+t^2) \arctan t - t$,

显然 $g(0) = 0$, 因为 $g'(t) = 2t \arctan t > 0$, 所以 $g(t) > g(0) = 0$ (当 $t > 0$),

即 $k \arctan \sqrt{k-1} - \sqrt{k-1} > 0$, 极小值 $-k \arctan \sqrt{k-1} + \sqrt{k-1} < 0$,

极大值 $k \arctan \sqrt{k-1} - \sqrt{k-1} > 0$,

又因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以方程有三个根, 分 别位于

$(-\infty, -\sqrt{k-1})$, $(-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内。

18 证明:

$$(1) f(x) = \ln(1+x) \text{ 在 } [0, \frac{1}{n}] \text{ 应用中值定理, } \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 1 = \frac{1}{1+x} \frac{1}{n}$$

$$0 < x < \frac{1}{n}, \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x} < 1, \text{ 即 } \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$(2) a_{n+1} = 1 + 1/2 + \dots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, n < x < n+1$$

其中 $a_{n+1} - a_n < 0, a_{n+1} < a_n$ 即 $\{a_n\}$ 单调递减

$$a_n = 1 + 1/2 + \dots + \frac{1}{n} > \ln(1+\frac{1}{1}) + (1+\frac{1}{2}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n$$

$$= \ln 2 - \ln 3/2 + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n$$

$$= \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > 0$$

$\{a_n\}$ 单调递减有界, 故收敛。

19. 解:

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy$$

$$\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy = \int_0^1 y df'_x(x, y) = y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy,$$

$$\text{于是, } I = \int_0^1 x dx \int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy = \int_0^1 x f'_x(x, 1) dx - \int_0^1 x dx \int_0^1 y f'_x(x, y) dy$$

$$= x f(x, 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx \int_0^1 y f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x, y) dx$$

$$= - \left[\int_0^1 x f_x(x, y) \Big|_0^1 dy - \int_0^1 dy \int_0^1 f_x(x, y) dx \right] = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy = a$$

20 解:

$$1) \mathbf{Q} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \therefore r(a_1, a_2, a_3) = 3$$

又 $\mathbf{Q} a_1, a_2, a_3$ 不能由 b_1, b_2, b_3 线性表示, $\therefore r(b_1, b_2, b_3) < 3$, 于是 $|b_1, b_2, b_3| = 0$, 解得 $a = 5$

$$2) (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 31 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 51 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 31 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 40 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 31 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ 于是 } \begin{cases} b_1 = 2a_1 + 4a_2 - a_3 \\ b_2 = a_1 + 2a_2 + 0a_3 \\ b_3 = 0a_1 + 0a_2 + a_3 \end{cases}$$

21. 解:

1)

$$\text{令 } a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 则 } Aa_1 = -a_1, Aa_2 = a_2,$$

根据特征值向量的定义, A 的特征值为 $l_1 = -1, l_2 = 1$, 对应的线性无关的特征向量为

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}r(A) = 2 < 3, \therefore |A| = 0 \text{ 故 } l_3 = 0$$

$$\text{令 } a_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 为矩阵 } A \text{ 的相应于 } l_3 = 0 \text{ 的特征向量 } \mathbf{Q}A \text{ 为实矩阵, 所以有 } \begin{cases} a_1^T a_3 = 0 \\ a_2^T a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) a_1 a_2 a_3 \text{ 单位化得: } r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 令 } \mathbf{Q} = (r_1, r_2, r_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \mathbf{Q}^T A \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 于是 } A = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22. 解:

$$1) P(X^2 = Y^2) = 1 \Rightarrow P(X^2 \neq Y^2) = 0, \text{ 即 } P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}, \text{ 同理如图:}$$

Y	-1	0	1	
X	0	1/3	0	1/3

0	1/3	0	1/3	1/3
1	1/3	1/3	1/3	

2) Z取值为 -1, 0, 1

$$P(XY = -1) = P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{3}, P(XY = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)$$

$$+ P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(XY = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$3) EX = \frac{2}{3}, EY = 0, EXY = 0, DX = \frac{2}{9}, DY = \frac{2}{3}, r_{XY} = 0$$

23. 解:

