



社科赛斯教育集团
SUCCESS Success Education Group

选择SUCCESS, 怎能不成功!

2011

辅导教材系列

2011年管理类本科专业全国联考辅导

MBA/MPA/M.P.A.CC

逻辑推理

预备知识：什么是充分性判断

● 什么是充分条件

有两个命题 A、B，若 A 成立，一定可以推出 B 成立，则 A 是 B 的充分条件。

例，(1) $x=1$ ；(2) $x^2-x=0$

若 $x=1$ ， $x^2-x=1-1=0$ 成立，则 $x=1$ 是 $x^2-x=0$ 的充分条件，即 A 是 B 的充分条件。

当然， $x=0$ 也是 $x^2-x=0$ 的充分条件。

(2) A: a, b 同号; B: $ab > 0$

● 充分性判断的解题说明

本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论。阅读每小題中的条件 (1) 和 (2) 后选择：

- A. 条件 (1) 充分，但条件 (2) 不充分
- B. 条件 (2) 充分，但条件 (1) 不充分
- C. 条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分，但条件 (1) 和条件 (2) 联合起来充分
- D. 条件 (1) 充分，条件 (2) 也充分
- E. 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分，条件 (1) (2) 联合起来也不充分

例， $ab > 0$ 成立

1. (1) $a > 0, b > 0$; (2) $a > 0, b < 0$
2. (1) $a > 0, b < 0$; (2) $a > 0, b > 0$
3. (1) $a > 0$; (2) $b > 0$
4. (1) $a > 0, b > 0$; (2) $a < 0, b < 0$
5. (1) $a > 0$; (2) $b < 0$

例 1. 某商品零售价去年上涨，而今年则降低了 20%，而现价是前年零售价的 94.4%。

- (1) 去年该种商品的零售价上涨了 18%
- (2) 去年该种商品的零售价上涨了 21%

设全年价格为 p ，去年上涨了 x 。根据题意， $p(1+x)(1-20\%) = 94.4\%p$ ，

计算得， $x=18\%$ ，选 A。

例 2. 售出一件 A 商品比售出一件 B 商品利润要高。()

(1) 售出 3 件 A 商品，2 件 B 商品共获利 64 元

(2) 售出 2 件 A 商品，3 件 B 商品共获利 56 元

选 C。

例 3. 要使 $\frac{1}{a} > 1$ 成立。()

(1) $a > 1$

(2) $a < 1$

选 E。

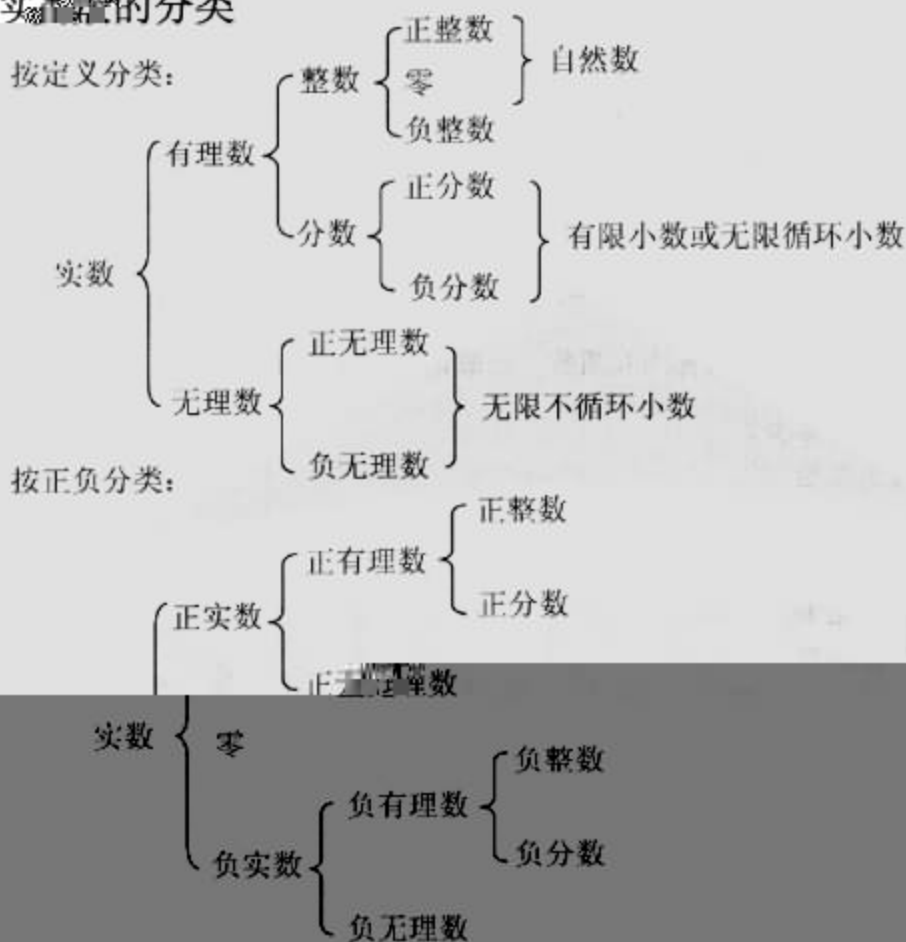
专题一：实数

● 大纲要求

实数的概念、分类、性质、性质及应用 (重点在应用上)

● 核心考点

一、实数的分类



注意：两种分类方式的不同，以及相互融合。

例如：判断 (1)：无理数+无理数=无理数

判断 (2)：上午 9 点到到下午 1 点共 4 个小时

二、数的概念

1. 自然数集 (注意) 非负整数集，是由正整数和零组成的。

2. 无理数与有理数的区别：有理数可以表示为 $\frac{a}{b}$ 的形式，而于无理数则不能。

一些常见的无理数: 圆周率 π 、自然对数的底数 e (2.71828.....)、根式类 ($\sqrt{2}, \sqrt{5}$ 等)

三角函数 $\sin 38^\circ, \tan 20^\circ$ 等

例如: 判断 (1) $\sqrt{7}$ 是无理数

判断 (2) $\sqrt{269}$ 是无理数

3, 倍数、约数: 当 a 能被 b 整除时, 称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数。

4, 奇数与偶数:

例如: 判断 (1) 存在既是奇数又是偶数的数字

5, 素数 (质数): 只有 1 和它本身两个约数的数。

50 以下的质数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

互质数: 两个数只有 1 作公约数的整数称为互质数, 一般记为 $\gcd(a, b) = 1$

例如: 回答 (1) 最小的质数是多少?

判断 (2) 有些负数是质数...

6, 合数: 除了 1 和它本身之外还有其他的约数

例如: 回答 (1) 最小的合数是多少?

判断 (2) 有些负数是合数

7, 相反数: 符号不同的两个数

例如: 判断 (1) 0 的相反数不存在

8, 非负数: $c \geq 0$, 称 c 为非负数

非负数从纯常用形式为: $|c|, c^2, c^{2n}$ (n 是整数), $\sqrt{c}$

9, 倒数: 乘积为 1 的两个实数互为倒数

例如: 判断 (1) 任何数都有倒数

10, 数轴:



三、数的整除关系

- (1) 能被 2 整除:
- (2) 能被 3 整除:
- (3) 能被 4 整除:
- (4) 能被 5 整除:
- (5) 能被 6 整除:
- (6) 能被 7 整除:
- (7) 能被 8 整除:
- (8) 能被 9 整除:
- (9) 能被 10 整除:
- (10) 能被 11 整除:
- (11) 能被 12 整除:

● 典型例题

1, 若 n 是一个大于 2 的正整数, 则 $n^3 - n$ 一定有约数 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

2、三个质数的积是其和的 5 倍, 求这三个质数

3, 能够被 1-7 (包括 1 和 7) 在内的每个整数整除的最小整数是多少 ()

- A. 420 B. 840 C. 1260 D. 2520 E. 5040

4, 若 x, y 是正整数, 且 $xy = 5$, 那么 $(x + y)^2$ 的值为

- A. ± 16 B. 16 C. 25 D. ± 36 E. 36

● 历年真题

1. (2002.1) 已知 a, b, c 是不完全相等的任意实数, 若 $x^2 = a^2 - bc$, $y^2 = b^2 - ac$, $z^2 = c^2 - ab$, 则 x, y, z

- A. 都大于 0 B. 至少有一个大于 0 C. 至少有一个不小于 0
D. 都不小于 0 E. 以上都不正确

注意: 扩展已知 a, b, c 是任意实数

2. (2004.10) 某单位有职工 40 人, 其中参加计算机考核的有 31 人, 参加外语考核的有 20 人, 有 8 人没有参加任何一种考试, 则同时参加计算机考核和外语考核的职工有 () 人

- A. 10 B. 13 C. 15 D. 19 E. 21

3. (2008.1) 一辆出租车有段时间的营运全在东西走向的一条大道上, 若规定向东为正, 向西为负, 且知该车的行驶公里数依次为 -10, 6, 5, -8, 9, -15, 12, 则将最后一名乘客送到目的地时, 该车的位置在首次出发地的 () 处

- A. 东面 1 公里处 B. 西面 1 公里处 C. 东面 2 公里处
D. 西面 2 公里处 E. 仍在首次出发地

4. (2008.1) 某单位有 90 人, 其中有 65 人参加外语培训, 72 人参加计算机培训, 已知参加培训而没有参加计算机培训的有 8 人, 则参加计算机培训而没参加外语培训的人数为 ()

- A. 5 B. 8 C. 12 D. 15 E. 25

5. (2008.1) $ab^2 < cb^2$

(1) 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $a < b < c$

6. (2008.1) $a > b$

(1) a, b 为实数, 且 $a^2 > b^2$

(2) a, b 为实数, 且 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

专题二：整式和分式

● 大纲要求

整式、分式的运算 (主要渗透在方程、不等式、函数问题的运算中)
(主要考察观察能力和计算能力)

● 核心考点

(一) 整式若干问题

一、运算规律:

(1) 交换律—— $ab=ba$

(2) 结合律—— $a(bc)=(ab)c$

(3) 分配律—— $a(b+c)=ab+ac$

二、一些常用的公式 (需牢记)

$$(a \pm b)^2 =$$

$$(a \pm b)^3 =$$

$$a^2 - b^2$$

$$a^3 \pm b^3 =$$

$$(a+b+c)^2 =$$

三、整式的除法

如果 $f(x)$ 除以 $g(x)$, 商式为 $Q(x)$, 余式为 $R(x)$, 则 $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$

1: 余式定理: 多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余式为 $f(a)$

$$f(x) \text{ 除以 } (ax-b) \text{ 的余式为 } f\left(\frac{b}{a}\right)$$

2: 因式定理: 相当于余式定理中余式为 0 的情况。

例 1: 求多项式 x^2+3x-1 除以 $x-1$ 的商式和余式

例 2: 已知多项式 $x^2 - 5x + k$ 可以被 $(x-3)$ 整除, 则 ()

- A. $k=1$ B. $k=-1$ C. $k=5$ D. $k=-6$ E. $k=6$

四、多项式的因式分解法

(1) 公式法: (见一些常用的公式)

例: $x^3 - 1 =$

(2) 提取公因式法:

例: $2x^4 - 2x^2 =$

(3) 十字相乘法: (可以因式分解的二次三项式下应用)

步骤: 先分解二次项系数, 分别写在十字交叉线的左上角和左下角, 再分解常数项在十字交叉线的右上角和右下角, 然后交叉相乘, 求代数和, 使其等于一次项系数。二次项系数一般分解只取正数, 而常数项则根据需要而定)

例: $2x^2 - 7x + 3 =$ (思考: 有几种分解方式, 哪一种是正确的)

(4) 待定系数法:

例: $x^3 - x^2 - x - 2 =$

● 典型例题

例 1: 已知多项式 $f(x) = x^3 + a^2x^2 + ax - 1$ 能被 $x+1$ 整除余-2, 则实数 a 的值为 (

- A. 1 B. 1 或 0 C. -1 D. -1 或 0 E. 以上均不正确

例 2: 如果 $a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ac - 2bc = 0$, 则 $a + b$ 的值为 ()

A. 1 B. 0 C. -1 D. -2 E. 以上均不正确

(二) 分式若干问题

一、有关分式的定义:

(1) 用 A、B 表示两个整式, 则 $\frac{A}{B}$ 就称为分式 (注意: B 如果是一个数字, 则 $\frac{A}{B}$ 就转化为整式了)

注意: 分式的分母不能为 0

(2) 最简分式: 分子与分母没有公因式

例: 回答 $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ 是最简分式吗?

(3) 有理式: 整式和分式统称为有理式

二、分式的运算:

分式的与分数之间的运算是 一致的。(包括: 通分, 约分等)

● 强度训练

例 1: $\frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}}$ 化为最简分式

例 2: $\frac{2a - \frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b}}{\frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b}}$ 化为最简分式

● 典型例题

例 1: $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 7$

(1) $m+n=3, mn=1$ (2) $m+n=3, mn=2$

例 2: 已知 $x^2 - 3x - 1 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2$ 的值为 ()

A. -1 B. 3 C. -3 D. ± 3 E. 以上均不正确

● 历年真题

1. (2002.10) 若 $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a} = k$, 则 K 的值为

A. 1 B. 1 或 -2 C. -1 或 2 D. -2 E. 以上均不正确

2. (2008.1) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, 则 $\triangle ABC$ 为

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形

D. 等腰三角形 E. 以上均不正确

专题三：比例、绝对值及平均数

一、比例问题

例: 回答下列比例形式 (1) y 与 $\frac{1}{a}$ 成正比 (2) y 与 $\frac{1}{a}$ 成反比

(5) 增长率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值 } a}$ 现值 $a(1+p\%)$

下降率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值 } a}$ 现值 $a(1-p\%)$

注意: 甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow \frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}} = p\%$, 甲是乙的 $p\% \Leftrightarrow \text{甲} = \text{乙} \cdot p\%$

(6) 几个重要的定理

(1) 更比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(2) 反比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

(3) 合比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(4) 分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(5) 合分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(6) 增减性定理 ($a, b > 0$)

$$\frac{a}{b} > 1 \quad \frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b} \quad (m > 0)$$

$$0 < \frac{a}{b} < 1 \quad \frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b} \quad (m > 0)$$

例: (2001.10) $a > b > 0, k > 0$, 则下列表达式正确的有

$$\begin{aligned} A) -\frac{b}{a} < -\frac{b+k}{a+k} \quad B) \frac{a}{b} < \frac{a-k}{b-k} \quad C) \frac{b}{a} > \frac{b+k}{a+k} \\ D) \frac{a}{b} < -\frac{a-k}{b-k} \quad E) -\frac{a}{b} < -\frac{a-k}{b-k} \end{aligned}$$

三、绝对值基本问题

1、正数的绝对值是它本身、负数的绝对值是它相反数、零的绝对值还是零

2、实数 a 的绝对值定义为: $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

3、性质: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

4、三角不等式定理与应用

(1) $-|a| \leq a \leq |a|$, 即任意实数的绝对值不小于它自身, 而绝对值的相反数不大于它自身。
当且仅当 $a \leq (\geq) 0$ 时, 左(右)边等号成立。

(2) 三角不等式, 即 $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

左边等号成立的条件: $ab \leq 0$ 且 $|a| \geq |b|$

右边等号成立的条件: $ab \geq 0$

(3) $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

左边等号成立的条件: $ab \geq 0$ 且 $|a| \geq |b|$

右边等号成立的条件: $ab \leq 0$

5、思考: (1) 形如 $|x-a| + |x-b|$ 的最大值与最小值, 在什么情况下取到最值

(2) 形如 $|x-a| - |x-b|$ 的最大值与最小值, 在什么情况下取到最值

例: 不等式 $|3x-12| = |x-4| + |2x-8|$ 成立的条件是

- A. $5 \leq x \leq 8$ B. $x \leq 5$ C. $x \geq 4$ D. $x \leq 4$ 或 $x \geq 5$ E. 以上均不正确

例: 上述不等式 $|3x-13| = |x-5| = |2x-8|$ 成立的条件是

● 典型例题

例 1: 设 a, b, c, d 都是正数, 使 a, d 的算术平均值大于 b, c 的算术平均值 ()

(1) $a < b < c < d$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

例 2: 不等式 $|x-3| + |6-x| < a$ 无解

(1) $a \leq 3$

(2) $a > 3$

● 历年真题

1. (2000.1) 一本书有三篇文章, 第一篇的页数分别是第二篇和第三篇页数的 2 倍和 3 倍, 已知第三篇比第二篇少 10 页, 则这本书有 () 页

A. 100 B. 105 C. 110 D. 120 E. 125

2. (2001.1) 一公司向银行借款 34 万元, 欲按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲, 乙, 丙三车间进行技术改造, 则甲车间应得 () 万元

A. 4 B. 8 C. 12 D. 18 E. 20

3. (2001.1) 某班同学在一次

同学平均成绩比男同学高 20%，则女同学的平均成绩为（ ）分

- A. 83 B. 84 C. 85 D. 86 E. 87

4. (2004.10) $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{a+c}$

(1) $0 < c < a < b$

(2) $0 < a < b < c$

5. (2004.10) 某工厂生产某产品，一月份每件产品销售的利润是出厂价的 25%，二月份每件产品出厂价降低 10%，成本不变，销售件数比一月份增加 80%，则销售利润比一月份的销售利润增长

- A. 6% B. 8% C. 15.5% D. 25.5% E. 无法计算

6. (2006.1) 如果 x_1, x_2, x_3 三个数的平均值为 5，则 $x_1 + 2, x_2 - 3, x_3 + 6$ 的算术平均值为（ ）

- A. $3\frac{1}{4}$ B. 6 C. 7 D. $9\frac{1}{5}$ E. 10

7. (2006.1) $|b-a| + |c-b| - |c| = a$

(1) 实数 a, b, c 在数轴上的位置如下



(2) 实数 a, b, c 在数轴上的位置如下



8. (2008.1) $f(x)$ 有最小值 2

(1) $f(x) = \left| x - \frac{5}{12} \right| + \left| x - \frac{1}{12} \right|$

(2) $f(x) = |x-2| + |4-x|$

9. (2008.1) 申请驾驶证时，必须参加理论考试和路考，且两种考试均通过。若在理论考试中 70% 的人通过了理论考试，80% 的人通过了路考，则最后领到驾驶执照的人有 60%

(1) 10% 的人两种考试都没有通过

(2) 20% 的人仅通过了路考

10. (2008.1) $\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|} = 1$ (注意: 这种题型转换思路)

(1) 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $abc > 0$

11. (2000.1) 某国参加北京奥运会的女运动员的性别比例为 19:13, 后来又增加了若干名男运动员, 于是男女运动员比例最终变为 30:19。如果后增加的男运动员比先增加的女运动员多 3 人。则最后运动员的总人数为 ()。

A. 681 B. 637 C. 700 D. 661 E. 600

12. (2007.1) 已知实数 a, b, x, y 满足 $y + \sqrt{x} = \sqrt{z} = 1 - a$ 和 $|x - z| = |y - 1 - b|$, 则 $3^{x+y} + 3^{y+z} =$ ()。

A. 25 B. 26 C. 27 D. 28 E. 29

专题四 方程

● 大纲要求

一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程组的解法及应用

● 核心考点

(一) 一元一次方程

1. 定义: 任何一个含一个未知数且未知数最高次数为 1 的方程均可通过同解变换化为如下形式:

$ax + b = 0$ ($a \neq 0$), 称这种形式为一元一次方程。

2. 解法: 将所给一元一次方程化简, 得到 $ax = -b$ ($a \neq 0$) 型, 进而得到方程的解 $x = -\frac{b}{a}$ 。

(二) 二元一次方程组和它的解

1. 两个二元一次方程组合在一起, 就组成了一个二元一次方程组。

2. 使二元一次方程组的两个方程左、右两边的值都相等的两个未知数的值叫做二元一次方程组的解。

3. 二元一次方程组的解法

代入消元法: 把其中的一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示, 然后代入另一个方程, 就可以消去一个未知数。

例,
$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

加减消元法: 将两个方程的两边分别相加或相减, 使两个方程中某个未知数的系数的绝对值相等, 然后把两个方程的两边分别相加或相减, 就可以消去这个未知数。

例,
$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 4x - 5y = -5 \end{cases}$$

4. 一次方程组的应用

对于含有两个或两个以上未知数的应用题可以利用到一次方程组来解决, 解题步骤大致是:

1. 根据实际问题, 直接设未知数
2. 分析问题中的各种数量关系, 找出其中的等量关系
3. 利用等量关系列方程组

注意: 一般可解的应用题, 有几个未知数就应找到几个等量关系, 但有些题型可能方程个数要小于未知数个数, 但仍然可以求解。(根据题的特殊需要)

一般以应用题(与实际生活生产相联系)的形式给出。

● 典型例题

例 1 一笔贷款, 分两次贷出, 一份年利率为 10%, 另一份年利率为 8%, 一年时间共得利息 4400 元, 如果把两份的利率交换那么利息一年可增加 200 元, 问这两份款共有多少?(利率问题)

例 2 有一矩形地, 若长加 5 米, 宽减 4 米, 面积应减少 20 平方米; 若长减 6 米, 宽加 5 米, 面积仍然减少 20 平方米. 求原矩形的周长是多少米?(面积问题)

例 3 有一个两位数, 个位数字比十位数字大 5, 如果把这两位数的十位数字与个位数字对换位置, 那么所得的新数是原数的 $\frac{8}{3}$ 倍, 求这个两位数。(数字问题)

例 4 已知某一铁路桥长 900 米, 现有一列火车从桥上通过, 测得火车从开始上桥到完全过桥共用 50 秒, 整列火车完全在桥上的时间是 40 秒, 求火车的速度和长度. (行程问题)

(三) 一元二次方程

一、基本知识

1. 一元二次方程: 含有一个未知数, 并且未知数最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程.

其一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 在这个问题中注意三点:

① 会判断一个方程是不是一元二次方程;

② 能准确的将一个一元二次方程整理成一般形式, 并准确的指出二次项系数, 一次项系数和常数项; 这一点是重要的.

另外, 根的判别式 $b^2 - 4ac$, 一元二次方程根与系数之间的关系都是用系数 a, b, c 表示的;

③ 要注意 $a \neq 0$ 这一条件.

二、一元二次方程的解法:

① 直接开平方将形如 $ax^2 = c (a, c \text{ 为常数, } a \neq 0, c \geq 0)$ 或 $(x+m)^2 = n (n \geq 0)$ 的一元二次方程求解.

② 配方法解一元二次方程, 特别的是会用配方法解方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 即会推导一元二次方程的求根公式.

例, $4x^2 + 4x + 1 = 0$, 配方得 $4(x + \frac{1}{4})^2 = 0$, 解得 $x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$

练习:

③ 熟练、准确的利用公式法解一元二次方程, 假设你不能利用直接开平方法, 你也不能利用因式分解法, 但只要掌握公式法, 对于解方程来说就足够了 (在方程有实数解的情况下).

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 的两根为 } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

其中 $b^2 - 4ac$ 称为判别式, 记为 $\Delta = b^2 - 4ac$,

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实根:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

※ 一元二次方程的根的情况:

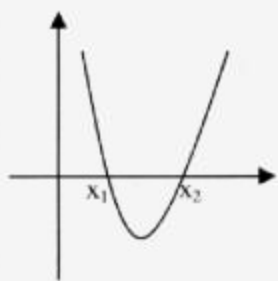
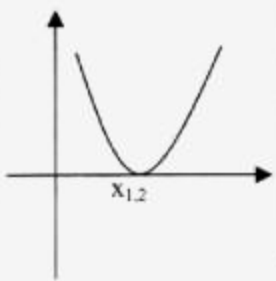
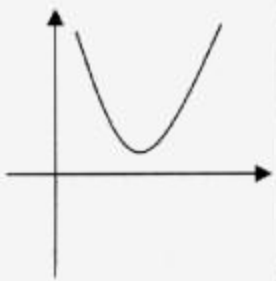
① 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实根:

② 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实根:

③ 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实根.

例, $2x^2 + x - 3 = 0$, 因式分解为 $2(x + \frac{3}{2})(x - 1) = 0$, 则 $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1$

二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的图像和根的关系

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)			
$f(x) = 0$ 根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$	无实根
$f(x) > 0$ 解集	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) < 0$ 解集	$x_1 < x < x_2$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$

根的判别式: $ax^2 + bx + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ 可以解决

① 给定一个方程可判断方程根的情况.

实根:

如 $2x^2 - 5x - 1 = 0$ 因为 $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$ 可判断方程一定有两个不相等

② 利用题目给出的条件, 求 m 或 b 的取值范围.

如关于 x 的方程 $(k+1)x^2 + 3x - 1 = 0$ 有实根, 求 k 的值.

解: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(k+1)(-1) = 9 + 4k - 4 = 4k + 5$

因为方程有实根 $4k + 5 \geq 0$, (建立起了关于 k 的不等式) $k \geq -\frac{5}{4}$

当 $k \geq -\frac{5}{4}$ 且 $k \neq 1$ 时, 方程有实根.

③ 证明方程根的情况.

如证明方程 $4x^2 + (4+k)x + k = 0$ 必有实根

证明: $\Delta = (4+k)^2 - 4 \times 4 \times k = k^2 + 8k + 16 - 16k$
 $= k^2 - 8k + 16$
 $= (k-4)^2$

不论 k 取何实数 $(k-4)^2 \geq 0$, 即 $\Delta \geq 0$.

即证明方程必有实根.

四、一元二次方程的根与系数之间的关系(韦达定理)(韦达定理)

设 x_1, x_2 是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

由一元二次方程的根与系数的关系, 得

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)(x_1 - x_2).$$

● 典型例题

例 1 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且满足

$x_1 + x_2 = x_1 \times x_2$, 则 k 的值为 ()

- (A) -1 或 $\frac{3}{4}$ (B) -1 (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$ (E) 以上都不正确

例 2 二次方程 $2x(kx-a)-x-6=0$ 没有实数根, 则 k 的最小整数值是 2 (充分性判断)

(1) $a=2$

(2) $a=4$

例 3 已知 x 是一元二次方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的实数根, 那么代数式 $\frac{x-3}{3x^2-6x} \div (x+2-\frac{5}{x-2})$ 的值为: ()

(A) $-\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{3}{4}$

(E) $-\frac{5}{6}$

例 4 某市供电局规定: 本月份用电量, 若不超过 100 千瓦·时, 则本月份电费只要交 20 元; 若超过 100 千瓦·时, 则除了交 20 元外, 超过部分每千瓦·时电费交 $\frac{1}{100}$ 元。小明家 10 月份用电 180 千瓦·时, 交电费 38 元; 问 11 月份用电量 x 千瓦·时, 交电费 y 元, 则 y 与 x 的函数关系式为 ()

● 历年真题

1. (2000.1) 已知方程 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根为 $x_1 = -1, x_2, x_3$, 则 $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = ()$.

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

2. (2001.1) 两地相距 351 公里, 汽车已行驶了全程的 $\frac{1}{9}$, 试问再行驶多少公里, 剩下的路程是已行驶的路程的 5 倍。()

- A. 17.5 公里 B. 21 公里 C. 21.5 公里 D. 22 公里

3. (2001.1) 方程 $x^2 + (2k+1)x + k = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 = 0$, 则 k 的值为 ().

- A. $k \leq -\frac{1}{4}$ B. $k \geq -\frac{1}{4}$ C. $k \leq -\frac{1}{4}$ ($k \neq 0$) D. $k \geq -\frac{1}{4}$ ($k \neq 0$)

4. (2001.10) 有 A、B 两种型号的设备, 在第一个工作日, 9 台 A 型机和 3 台 B 型机共加工零件 189 个, 而在第二个工作日, 5 台 A 型机和 6 台 B 型机共加工零件 196 个, 则 A、B 两种机型每天分别加工零件 ().

- A. 14, 21 B. 21, 14 C. 15, 18 D. 18, 15

5. (2001.10) 方程 $(x^2 + 3x^2 + px + 5) = 0$ 的根为 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$, 则 $p = ()$.

- A. 10 B. -6 C. 6 D. -10

6. (2002.1) 已知方程 $x^2 + 6x + (a-2)x - 3 + 9 - 2a = 0$ 的根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值为 ().

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ & = (-6 - (a-2))^2 - 2(-3 + 9 - 2a) \\ & = (-a-4)^2 - 2(-3 + 9 - 2a) \\ & = a^2 + 8a + 16 - 6 + 4a \\ & = a^2 + 12a + 10 \end{aligned}$$

A. $\frac{2x^3}{3}$ B. $\frac{2x^3}{3}$ C. $\frac{x^3}{8}$ D. $\frac{x^3}{2}$

8. (2003.1) 方程 $x^2 + (a+b)x + c = 0$ 的根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值为 ().

(1) $b = 4$ $c = 0$

(2) $b^2 - 4c = 16$

9. (2003.1) 所得税是工资加奖金总和的 30%，如果一个人的所得税为 6810，奖金为 3200 元，则它的工资为 ()。

A. 12000 元 B. 15900 元 C. 19500 元 D. 21900 元 E. 62000 元

10. (2003.1) 车间共有 40 人，其技术操作考核成绩的平均分为 80 分，其中男工平均成绩为 83 分，

女工平均成绩为 78 分。该车间有女工 ()。

A. 16 人 B. 18 人 C. 20 人 D. 24 人 E. 28 人

11. (2003.10) 某地区 2001 年绿色面积较上年增加了 20%，人口却只增长，结果人均绿地

上年增长了 21%。()

(1) 2001 年人口较上年下降了 8.26%

(2) 2001 年人口较上年下降了 10%

12. (2004.1) x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实根，

(1) $k > \frac{1}{2}$ (2) $k = \frac{1}{2}$

13. (2005.1) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一正一负两个实根。()

(1) $b = -4$ (2) $b = -21$

14. (2007) 方程 $\sqrt{x-p} = x$ 有实根，则 p 的取值范围是 ()。

(1) $p \geq 0$ (2) $p < \frac{1}{4}$

5 ($a < b$)，则该

15. (2008.5) 方程 $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ 的两根分别为等腰三角形的腰 a 和底 b ，则该直角三角形的面积是 ()。

A. $\frac{\sqrt{11}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ E. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

16. (2008.8) 若用浓度 30% 和 20% 的两种食盐溶液配成浓度为 25% 的食盐溶液 300 克，则

甲、乙两种溶液应各取 ()。

A. 180 克和 320 克 B. 185 克和 315 克 C. 190 克和 310 克

D. 195 克和 305 克 E. 200 克和 300 克

17. (2008.9) 将价值 200 元的甲原料与价值 480 元的乙原料配成一种新原料, 若新原料每一千克的售价分别比甲乙原料每千克的售价少 3 元和多 1 元, 则新原料的售价是 ()。

A. 16 元 B. 16 元 C. 17 元 D. 18 元 E. 19 元

18. (2008.16) 本学期某大学的 a 个学生或者付 x 元的全额学费或者付半额学费, 付全额学费的学生所付的学费占 a 个学生所付学费总额的比率是 $\frac{1}{3}$ 。()

(1) 在这 a 个学生中 20% 的人付全额学费。

(2) 这 a 个学生本学期 9120 元学费。

19. (2008.21) 方程 $2ax^2 - 2x - 3a + 5 = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1。()

(1) $a > 3$ (2) $a < 0$

20. (2008.23) 一件含有 25 张一类贺卡和 30 张二类贺卡的邮包的总重量 (不计信封重量) 为 700 克。()

(1) 一类贺卡重量是二类贺卡重量的 3 倍。

(2) 一张一类贺卡和两张二类贺卡的总重量是 $\frac{100}{3}$ 克。

21. (2009.1) 一家商店为回收资金, 把甲乙两件商品均以 480 元一件卖出。已知甲商品赚了 20%, 乙商品亏了 20%, 则商店盈亏结果为 ()。

A. 不亏不赚 B. 亏了 50 元 C. 赚了 50 元 D. 赚了 40 元 E. 亏了 40 元

22. (2009.6) 方程 $|x - |2x + 1|| = 4$ 的根是 ()

A. $x = -5$ 或 $x = 1$ B. $x = 5$ 或 $x = -1$ C. $x = 3$ 或 $x = -\frac{5}{3}$ D. $x = -3$ 或 $x = \frac{5}{3}$

23. (2009.7) $3x^2 + bx + c = 0 (c \neq 0)$ 的两个根为 α, β , 如果 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 为根的一元二次方程是 $3x^2 - bx + c = 0$, 则 b 和 c 分别为 ()

A. 2, 6 B. 3, 4 C. -2, -6 D. -3, -6 E. 以上结果都不正确

24. (2009.4) 在某实验中, 三个试管各盛水若干克。现将浓度为 12% 的盐水 10 克倒入 A 管中, 混合后取 10 克倒入 B 管中, 混合后再取 10 克倒入 C 管中, 结果 A、B、C 三个试管中盐水浓度分别为 6%、2%、0.5%, 那么三个试管中原来盛水最多的试管及其盛水量各是 ()。

A. A 试管, 10 克

B. B 试管, 20 克

C. C 试管, 40 克

D. B 试管, 40 克

专题五 一元一次不等式和一元二次不等式

● 大纲要求

一元一次不等式、一元二次不等式的解法及应用

核心考点及典型例题

一、基本知识点

(一) 一元一次不等式(组)及解法

1. 定义: 含有一个未知数并且未知数的最高次数为 1 的不等式称为一元一次不等式。

标准形式为 $ax > b(a \neq 0)$ 或 $ax < b(a \neq 0)$ 。

2. 解法: 将所给一元一次不等式为标准型后, 不等式两边同除以未知数 x 的系数 a 。

注意: 当 $a > 0$ 时, 不等号不变向; 当 $a < 0$ 时, 不等号变向。

3. 一元一次不等式组的解法: 分别求出不等式组的每一个一元一次不等式的解集后, 求这些解集的交集。

注意: 求交集时, 可在数轴上画出范围

$$\text{例, } \begin{cases} 3x+5 > 0 \\ 2x-1 < 3 \end{cases}, \text{ 得 } -\frac{5}{3} < x < 2$$

(二) 一元二次不等式及其解法

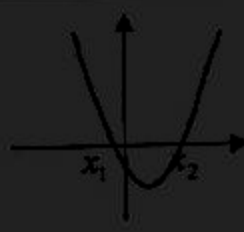
1. 一元二次不等式定义

(1) 一元二次不等式：含有一个未知数且未知数的最高次数为二次的不等式。

(2) 一元二次不等式的一般形式为： $ax^2+bx+c>(<)0(a>0)$ 或 $(a<0)$

2. 解法：

等利用二次函数图像解一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x \in \Phi$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$	$x_1<x<x_2$	$x \in \Phi$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像		

例 6.2 不等式 $-x^2+3x-2<0$ 的解为：

(2) 利用数的运算性质把分式不等式转化为整式不等式；

例 6.3 不等式的解集为 $(-3,1)$ 。()

$$(1) \frac{3x-7}{x^2+2} \geq 2 \quad (2) \frac{3x-7}{x^2+2} > 2$$

(3) 利用函数单调性解决简单的含指数对数不等式。

例 6.4 不等式 $\log_{2x-1}(x^2 - x + 1) > 0$ 成立。()

$$(1) \frac{1}{2} < x < 1 \quad (2) x > 1$$

注意: 若不等式二次项系数 $a < 0$, 可化为正值再求解集。

(三) 不等式的基本性质

若 $a > b$, 那么 $a + c > b + c, a - c > b - c$ 。

若 $a > b$, 当 $c > 0$ 时, $ac > bc$;

当 $c < 0$, 那么 $ac < bc$ 。

$$(2) \text{ 若 } \left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$$

$$(3) \text{ 若 } \left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$$

$$(4) a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$$

$$(5) a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(6) 平均值定理

1: 当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 n 个正数时, 它们的算术平均数不大于它们的几何平均数, 即

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$3: \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (ab > 0), ab \text{ 同号}$$

● 典型例题

例 1 $2^x + 2^{-x}$ 是否有最小值, 若有, 则最小值为多少?

例 2 函数 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ 的最小值为多少? ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 4 D. 6 E. 8

例 3 设 $A = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}+1} + \frac{1}{2^{10}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}+10}$, 则 A 与 1 的大小关系是_____

有些类似的, 2008 年 MBA 联考第一题:

$$1. \frac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{128}) + 1}{3 \times 3^2 \times 3^4 \times \cdots \times 3^{128}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{128}}$$

- A. $\frac{1}{2} \times 3^{128} + 3^{128}$ B. $\frac{1}{2} + 3^{128}$ C. $\frac{1}{2} \times 3^{128}$
D. $\frac{1}{2} \times 3^{128}$ E. 以上结果均不正确

例 4 $a+b+c \geq \frac{1}{3}$
(1) $a+b+c=1$ (2) $a>0, b>0, c>0$

例 5 若 $a < b < 0$, 则下列不等式成立的是 ()。

- (A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $ab < 1$ (C) $\frac{a}{b} < 1$ (D) $\frac{a}{b} > 1$ (E) $b - a < 0$

例 6 若把 08 真题第 26 题的其中一个符号改动: $(2x^2 + x - 3)(-x^2 + 2x + 2) < 0$ ()

(1) $x \in [-3, -2]$

(2) $x \in (4, 5)$

例 7 若不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解是 $2 < x < 3$, 则不等式 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 的解集为: ()

- (A) $-3 < x < -2$ (B) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$

例 8 若 $a > b > 0$, 则下列不等式成立的是 ()

A. $\log_a b > \log_b a$

B. $|\log_a b + \log_b a| > 2$

C. $(\log_b a)^2 < 1$

D. $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

● 历年真题

1. (2001.1) 设 $0 < x < 1$, 则不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解是 ()。

A. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (2002.10) 不等式 $4 + 5x^2 > x$ 的解集是 ()

A. 全是实数

B. $(5, -1)$

C. $(-4, 2)$

D. 空集

3. (2003.10) 不等式 $(k+3)x^2 - 2(k+3)x + k - 1 < 0$, 对 x 的任意数值都成立。()

(1) $k = 0$ (2) $k = -3$

4. (2004.10) $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$ 。()

(1) $0 < c < a < b$ (2) $0 < a < b < c$

5. (2005.1) 满足不等式 $(x+4)(x+6)+3 > 0$ 的所有实数 x 的集合是 ()。

A. $[4, +\infty)$ B. $(4, +\infty)$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -1)$ E. $(-\infty, +\infty)$

6. (2005.1) 实数 a, b 满足: $|a|(a+b) > a|a+b|$ 。()

(1) $a < 0$ (2) $b > -a$

7. (2005.1) $4x^2 - 4x < 3$ 。()

(1) $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (2) $x \in (-1, 0)$

8. (2006) 已知不等式 $ax^2 + 2x + 2 > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则 $a =$ ()。

A. -12 B. 6 C. 12 D. -12 E. 以上答案均不正确

9. (2008.10) 直角边之和为 12 的直角三角形面积最大值等于 ()。

A. 16 B. 18 C. 20 D. 22 E. 以上都不是

10. (2008.26) $(2x^2 + x + 3)(-x^2 + 2x + 3) < 0$ 。()

(1) $x \in [-3, \frac{1}{2}]$

(2) $x \in (4, 5)$

11. (2008.29) $ab^2 < cb^2$ 。()

(1) 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $a < b < c$

12. (2009.3) 某工厂定期购买一种原料。已知该厂每天需用该原料 6 吨, 每吨价格 1800 元, 原料的保管等费用平均每吨 3 元, 每次购买原料需支付运费 900 元。若该厂要使平均每天支付的总费用最省, 则应该每 () 天购买一次原料。

A. 11 B. 10 C. 9 D. 8 E. 7

专题六 数列 (一)

● 大纲要求

等差数列、等比数列

一、数列的基本概念

1. 数列的定义: 按一定的次序排列的一列数叫做数列。数列中的每一个数叫做数列的项。

数列的一般表达式为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 或简记为 $\{a_n\}$, 其中 a_n 是数列 $\{a_n\}$ 的通项, 自然数 n 是 a_n 的序号。

2. 数列的通项公式: 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示, 这个公式叫做数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

如: 数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{n+1}$

3. 数列的前 n 项和: 把数列 $\{a_n\}$ 中, 从第 1 项开始到第 n 项为止的 n 个数列相加, 所得之和叫做这个数列的前 n 项和, 记为 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

数列 $\{a_n\}$ 中, a_n 与 S_n 有如下关系:
$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \end{cases}$$

例, (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = \frac{3(3^n + 1)}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____。

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} (n \in N^+)$, 其前 n 项和 $S_n = 9$, 则 $n =$ _____。

4. 一个重要考点 (拆项法):

例如: 09 年第 13 题)

(09 年第 13 题) 设直线 $nx + (n+1)y = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

5. 在等差数列中 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ 中, 与首项和末项等“距离”的两项之和, 都等于首项与末项之和, 如 $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ 。

6. 在等差数列中若 $m+n=p+q$ (角标之和相等) 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ (对于中项也适用)

例, 已知 $-4, -3a, -9, b$ 构成等差数列, 则 $b = (\quad)$

A. $-\frac{16}{3}$ B. $\pm \frac{16}{3}$ C. $-\frac{28}{3}$ D. $\pm \frac{28}{3}$ E. $-\frac{16}{3}$ 或 $-\frac{28}{3}$ (应用 4, 5, 6)

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 也为等差数列。

例, 求等差数列 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 公差

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 、 Z_n , 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{Z_{2n-1}}$

$$\text{简要证明: } \frac{a_n}{b_n} = \frac{2a_n}{2b_n} = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{b_1 + b_{2n-1}} = \frac{\frac{a_1 + a_{2n-1}}{2} (2n-1)}{\frac{b_1 + b_{2n-1}}{2} (2n-1)} = \frac{S_{2n-1}}{Z_{2n-1}}$$

● 典型例题

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d=1$, $S_{99}=137$, 则 $a_2+a_4+a_6+\dots+a_{98}$ 等于 ()

A. 91 B. 92 C. 93 D. 94 E. 以上都不正确

例 2 已知数列 $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{14}, \dots, \sqrt{2n+2}, \dots$ 那么 $\sqrt{2}$ 是这个数列的第几项 ()

A. 23 B. 24 C. 19 D. 25 E. 20

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为正数, 且 $a_3 \cdot a_7 = -12$, $a_4 + a_6 = -4$, 则 S_{20} 为 ()

- A. 180 B. -180 C. 90 D. -90 E. 以上都不正确

例 4 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后三项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 () 项。

- A. 11 B. 12 C. 15 D. 17 E. 以上结果均不正确

例 5 等差数列前 m 项和是 30, 前 $2m$ 项和是 100, 则它的前 $3m$ 项和是 ()

- A. 170 B. 190 C. 210 D. 230 E. 以上结果均不正确

专题七 数列 (二)

三、等比数列

● 核心考点

1. 定义: 如果一个数列从第二项起, 每一项与它前一项的比等于同一个常数, 这个数列叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 记为 q 。

2. 等比数列的通项公式: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

3. 等比数列前 n 项和 S_n 的公式: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$ ($q \neq 1$)

当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$

例, 某超市去年的销售额为 a 万元, 计划在后 10 年内每年比上一年增加 10%, 从今年起 10 年内, 这家超市的总销售额为 ()

- A. $1.1^9 a$ B. $1.1^5 a$ C. $10(1.1^{10} - 1)a$ D. $11(1.1^{10} - 1)a$ E. 以上结果均不正确

无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $|q| < 1$, 则该数列的各项和为 $S = \frac{a_1}{1-q}$

例, 一个等比数列, $a_1 = 1, q = \frac{1}{3}$, 求: 所有项之和。

4. 等比中项: 如果 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项, 且 $G = \pm\sqrt{ab}$

(注意正负号)

5. 在等比数列 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ 中, 与首项和末项等距离的两项之积等于首项与末项之积, 如

$$a_2 \cdot a_{n-2} = a_1 \cdot a_n。$$

引申 $a_c \cdot a_d = a_s \cdot a_t (c+d=s+t)$

例, 在等比数列 $\{a_n\}$, 已知 $a_1 = 5$, $a_9 a_{10} = 100$, $a_{18} = (\quad)$

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25 E. 以上结果均不正确

6. 非零常数列 $c, c, c, \dots (c \neq 0)$ 是公比为 $q = 1$ 的等比数列。

● 典型例题

例 1 如果将 20、50、100 各加上同一个常数能组成一个等比数列, 那么这个数列的公比是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$ E. 以上都不正确

例 2 数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, $a_6 = 3$, 则 $a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ 的值等于 ()

A. 3^5 B. 3^6 C. 3^7 D. 3^8 E. 以上都不正确

例 3 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 5^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (a_n - 1) \dots$

- A. $(5^n - 1) \cdot 2$ B. $5^{n+1} - 1$ C. $\frac{2}{3}(5^{n+1} - 1)$ D. $\frac{2}{3}(5^n - 1)$ E. 以上结果均不正确

例 4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_6}{S_3} = \frac{31}{32}$

$$(1) q = -\frac{1}{2} \quad (2) q = 1$$

例 5 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其前 n 项和 $S_n = \frac{3}{4}(9^n - 1)$

$$(1) a_n = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} \quad (2) a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

S U C C E S S

● 历年真题

1. (2006.1) 若 $6, a, c$ 成等差数列, 且 $36, a^2, c^2$ 也成等差数列, 则 c 为 ()。

- A. -6 B. 2 C. 3 或 -2 D. -6 或 2 E. 以上结果均不正确

2. (2007) 整数数列 a, b, c, d 中 a, b, c 成等比数列, b, c, d 成等差数列。()

$$(1) b = 10, d = 6a \quad (2) b = -10, d = 6a$$

3. (2008.11) 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3$, 那么这个数列的通项公式是 ()。

$$A. a_n = 2(n^2 + n + 1) \quad B. a_n = 3 \cdot 2^n \quad C. a_n = 3n + 1$$

$$D. a_n = 2 \cdot 3^n \quad E. \text{以上结果均不正确}$$

4. (2008.20) $S_2 + S_6 = 2S_8$. ()

(1) 等比数列前 n 项和为 S_n , 且公比为 $q = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

(2) 等比数列前 n 项和为 S_n , 且公比为 $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

5. (2009.11) 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$), $a_1 = \frac{1}{2}$, 前 n 项和 S_n 满足 $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ ($n \geq 2$),

则 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是 ()。

A. 首项为 2、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

B. 首项为 2、公比为 2 的等比数列

C. 既非等差数列也非等比数列

D. 首项为 2、公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列

专题八 排列组合

● 核心考点

两个基本原理

1. 加法原理: 做一件事, 完成它可以有 n 类办法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, …… , 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$ 种不同方法。

2. 乘法原理: 做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, …… , 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法。

区别: 做一件事, 完成它若是有 n 类办法, 是分类问题, 每一类中的方法都是独立的, 因此用加法原理; 做一件事, 需要分 n 个步骤, 步与步之间是连续的, 只有将分成的若干个互相联系的步骤, 依次相继完成, 这件事才算完成, 因此用乘法原理。(百度)

一、排列和排列数

1. 排列的定义: 从 n 个不同元素中, 任取 $m (m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

因此, 如果两个排列相同, 不仅这两个排列的元素必须完全相同, 而且排列的顺序必须完全相同。

2. 排列数: 从 n 个不同元素中取出 $m (m \leq n)$ 个元素的所有排列的总数, 叫做从 n 个不同的元素中

任取 m 个元素的排列数, 记为 P_n^m (或 A_n^m)。

当 $m = n$ 时, 叫做 n 个元素的全排列, 也叫 n 的阶乘, 记为 $n!$ 。

排列数公式: $P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

$$P_n^n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

特殊: $P_n^0 = 1; P_n^m = P_n^{n-m} = P_n^k P_{n-k}^{m-k}$

规定 $0! = 1$

若 n 个元素中有 m 个相同的元素, 则这 n 个元素的全排列为: $\frac{P_n^n}{P_m^m}$

二、组合和组合数

1. 组合的定义: 从 n 个不同元素中, 取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组, 叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个组合。

因此, 含有相同元素的两个组合是同一个组合, 与次序无关。

2. 组合数: 从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的总数, 叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的组合数, 记为 C_n^m 。

规定 $C_n^0 = 1$, 显然 $C_n^n = 1$ 。

组合数公式: $C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

3. 组合数的性质: $C_n^m = C_n^{n-m}$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

特殊: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$

三、可重复排列与投信原理

若有 n 个标有不同编号的小球, 每次取出一个小球记录其编号并放回, 共取 m 次, 把这些编号表小球) 照一定的顺序排成一行, 其排列总数为: n^m

投信原理: 把 m 封信投递到 n 个信筒的投递方法

● 典型例题

例 1 9 个人坐成一圈, 问不同坐法有多少种 ()

- A. P_9^9 B. C_9^8 C. P_9^8 D. P_8^8 E. 以上都不正确

例 2 $(a+b+c+d)(e+f+g)(x+y+z+u+v)$ 的展开式中一共有多少项 ()

- A. 60 B. 80 C. 100 D. 120 E. 以上都不正确

例 3. A, B, C, D, E, F, G 七人排成一列, A, B, C 必相邻有多少种排法 ()

- A. 120 B. 180 C. 360 D. 720 E. 以上都不正确

若 A, B, C, D, E, F, G 七人排成一列, A, B, C 必相邻有多少种排法 ()

例 4 凸 N 边形内角线共有多少条 ()

- A. N B. $N+1$ C. $\frac{N(N-3)}{2}$ D. $\frac{N(N-1)}{2}$ E. 以上都不正确

● 历年真题

1. (2008.13) 有四位球迷, 各自有 6 个球, 后每人各得 1 个球, 若安排 2 人比赛, 可以抽 1 个球, 2 个球, 3 个球, 4 个球, 5 个球, 6 个球, 问 2 人抽球不能抽到相同的球, 共有多少种抽法和致力。

- A. 92 B. 93 C. 94 D. 95 E. 96

2. (2008.25) 公路 AB 上各点之间共有 90 种不同的车票

- (1) 公路 AB 上有 10 个车站, 每两个站之间都有 2 种车票
(2) 公路 AB 上有 9 个车站, 每两个站之间都有 2 种车票

3. (2009.8) 设 $A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)$ 满足

$$a_1(x-1) + 2a_2(x-1)^2 + \dots + na_n(x-1)^n, \text{ 则 } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n =$$

$$A. \frac{3^n - 1}{2} \quad B. \frac{3^{n+1} - 1}{2} \quad C. \frac{3^{n+1} - 3}{2} \quad D. \frac{3^n - 3}{2} \quad E. \frac{3^n - 3}{4}$$

4. (2009.10) 湖中有四个小岛，它们的位置恰好近似构成正方形的四个顶点。若要修建起三座桥将这四个小岛连接起来，则不同的建桥方案有（ ）种。

A. 12 B. 16 C. 18 D. 20 E. 24

专题九 概率初步

● 核心考点

一、随机事件

1. 随机试验、必然事件、不可能事件、随机事件

随机试验：如果每次试验的可能结果不止一个，且事先不能肯定会出现哪一个结果，这样的试验称为随机试验。

是指具有以下三个特点的试验

- (1) 可以在相同的条件下重复进行
- (2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现

必然事件：在一定条件下必然发生的事件叫做必然事件，如“在标准大气压下，水的温度达到 100°C 时沸腾”，就是必然事件。

不可能事件：在一定的条件下不可能发生的事件叫做不可能事件，如“在常温下，铁块熔化”，就是不可能事件。

随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件叫做随机事件，如“掷一枚硬币，正面向上”，就是随机事件。

常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示事件，如设“掷两枚均匀的骰子，出现点数之和为 7”，记为事件 A 。

2. 基本事件、样本空间

基本事件：每次试验的结果

样本空间：随机试验所有可能的结果的集合（基本事件的集合）

例：投硬币问题：

- (1) 投一次硬币观察出现正反面的情况 (2) 投两次硬币观察正反面情况

如果试验是将一枚硬币抛掷两次，则样本空间由如下四个样本点组成：

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

3. 事件的 4 种关系

(1) 包含：若事件 A 发生必然导致 B 发生，则事件 B 包含 A，记为 $A \subset B$ 。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 $A \subset B$ 。

A 与 B 互斥：若事件 A 与 B 互斥，则 A 与 B 中至少有一个发生，则 A 与 B 互斥。记为 $A \cap B = \emptyset$ 。

A 与 B 对立：若事件 A 与 B 对立，则 A 与 B 互斥。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

(2) 事件 A 与事件 B 有一个发生，记为 $A \cup B$ ，记为 $A \cup B$ 。

(3) 事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $A \cap B$ ，记为 $A \cap B$ 。

(4) 事件 A 与事件 B 互斥，记为 $A \cap B = \emptyset$ 。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

$$A \cap B = \emptyset$$

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

(5) 事件 A 与事件 B 互斥，记为 $A \cap B = \emptyset$ 。

例：设 A 为事件“甲队获胜”，B 为事件“甲队或乙队获胜”，则 A 与 B 互斥。

(6) 事件 A 与事件 B 互斥，记为 $A \cap B = \emptyset$ 。

例, 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八张卡片中任取一张, 设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”; 事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”; 事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片” 请用基本结果表示如下事件:

$$A \cup B; AB; \bar{B}; A - B; B - A; BC; \overline{B \cup C}; (A \cup B)C$$

二、随机事件的概率

在科学试验中, 事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 表示事件 A 发生的比例, 其中 m 表示事件 A 发生的次数, n 表示试验的总次数。

在大量重复同一试验时, 事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数, 这个常数称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$ 。

概率是事件 A 发生的可能性大小的度量, 它是一个介于 0 和 1 之间的实数。概率的取值范围是 $[0, 1]$ 。概率为 0 表示事件 A 不可能发生, 概率为 1 表示事件 A 必然发生。

概率的加法公式: 如果事件 A 和事件 B 互斥, 那么事件 A 和事件 B 至少有一个发生的概率等于事件 A 发生的概率加上事件 B 发生的概率, 即:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

概率的乘法公式: 如果事件 A 和事件 B 相互独立, 那么事件 A 和事件 B 同时发生的概率等于事件 A 发生的概率乘以事件 B 发生的概率, 即:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (2)$$

全概率公式: 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组, 即它们两两互斥, 且它们的并集为必然事件, 那么对于任意事件 B, 有:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \quad (3)$$

贝叶斯公式: 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0$, 那么对于任意事件 B, 有:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)} \quad (4)$$

以上公式是概率论中的基本公式, 也是解决概率问题的基本工具。在实际应用中, 需要根据具体情况选择合适的公式进行计算。

(4) 对任意事件 A , 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

例, 设事件 A 与 B 互不相容, 且 $P(A) = m, P(B) = n$, 求下列事件:

$P(AB); P(A \cup B); P(A - B); P(\overline{AB})$

小专题:

(投信问题) 将 n 封不同的信投到 N 个信筒中 ($n \leq N$),

求 (1) 恰有 n 个信筒各装有一封信的概率

(2) 指定一个信筒装有两封信的概率

(取球问题) 盒子中有白球 8 个, 红球 5 个, 按三种不同的方式取球

(1) 有重复 (放回): 从盒子中取四次球, 每次一个, 看后放回

(2) 无放回: 从盒子中取四次球, 每次一个, 看后不放回

(3) 一次性取球: 从盒子中一次性取出四个球

问: 恰好取到两个白球的概率

(数字问题) 从 $0, 1, 2, \dots, 9$ 这 10 个数字中不放回的取 4 个数字, 并按先后顺序排成一列, 试求: (1)

四个数排成一个奇数的概率; (2) 四个数排成一个四位数; (3) 四个数排成一个四位奇数

2. 相互独立事件同时发生的概率

事件 A 与事件 B 同时发生的事件叫做事件 A 与事件 B 的积, 记做 $A \cdot B$ 或 $A \cap B$ 。

一般地, 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生的事件叫做事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积, 记做 $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ 或 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 。

如果事件 A 与事件 B 是相互独立事件, 则事件 A 与事件 B 同时发生的概率

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{是两事件独立的充要条件})$$

两个有用的公式:

$$(1) A \text{ 与 } B \text{ 独立} \Leftrightarrow A \text{ 与 } \bar{B} \text{ 独立} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ 与 } B \text{ 独立} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ 与 } \bar{B} \text{ 独立}$$

$$(2) \text{ 如果事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 相互独立, 则 } P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$$

$$\text{事件 } A_1, A_2, A_3 \text{ 相互独立的充要条件是: } \begin{cases} P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

一般地, 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生的概率

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (\text{这不是 } n \text{ 个事件充要条件})$$

其充要条件是: 任意 k 个 ($k \leq n$) 事件都满足:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

贝努里概型:

条件: N 次实验, 每次实验相互独立, 每次实验只有两种结果, 成功 (概率为 p), 失败 (概率为 q)

(1) n 次实验成功一次

(2) n 次实验成功 m 次

例, 盒子中有白球 8 个, 红球 5 个, 按三种不同的方式取球 (从成功和失败来理解)

(1) 有重复 (放回): 从盒子中取四次球, 每次一个, 看后放回, 求取到两白球的概率

(3) n 次实验成功 m 次, 其中第 z ($z \leq n$) 次实验成功

(2) 有重复 (放回): 从盒子中取四次球, 每次一个, 看后放回, 求第二次试验取到白球, 且共取到两个白球的概率

(4) 直到第 n 次成功, 前 $n-1$ 次均失败

(2) 有重复 (放回): 从盒子中取球, 每次一个, 看后放回, 求第 3 次取到白球之前取到 2 个红球的概率

● 典型例题

例 1 A, B 是必然事件

(1) 事件 A 与 B 相互独立 (2) 事件 A 与 B 互不相容

例 2 甲、乙、丙三人各自去破译密码, 设他们各自能破译的概率分别为 $1/5, 1/3, 1/4$, 则密码被破译出来的概率为 ()

A. $47/60$ B. $7/12$ C. $1/60$ D. $1/2$ E. $3/5$

例 3 (计算) 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{3}$, 甲、乙两人在罚球线各投 2 次, 求恰好命中一次的概率。

例 4 (计算) 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束, 设各局比赛相互间没有影响,

求 (I) 前三局比赛甲队领先的概率; (II) 本场比赛乙队以 3:2 取胜的概率; (III) 甲以 3:1 的大比分战胜乙的概率。

● 历年真题

1. (2006.1) 若 $C \supset A, C \supset B, P(C) = 0.8, P(\overline{A+B}) = 0.7$, 则 $P(C-AB) = ()$ 。

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.5 E. 0.6

2. (2006.10) 一批产品的合格率为 95%，而合格率中一等品占 60%，其余为二等品。现从中任取一件检验，这件产品是二等品的概率为 ()。

A. 0.575 B. 0.58 C. 0.535 D. 0.26 E. 以上结果均不正确

3. (2008.14) 若从原点出发的质点 M 向 x 轴的正向移动一个和两个坐标单位的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，则该质点移动 3 个坐标单位，达到 $x=3$ 的概率是 ()。

A. $\frac{19}{27}$ B. $\frac{20}{27}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{22}{27}$ E. $\frac{23}{27}$

4. (2008.15) 某乒乓球男子单打决赛在甲乙两选手间进行比赛用 7 局 4 胜制。已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率为 0.7，则甲选手以 4:1 战胜乙的概率为 ()。

A. 0.84×0.7^3 B. 0.7×0.7^3 C. 0.3×0.7^3

D. 0.9×0.7^3 E. 以上都不对

5. (2009.9) 在 36 人中，血型情况如下：A 型 12 人，B 型 10 人，AB 型 8 人，O 型 6 人，从中随机选出两人，则两人血型相同的概率是 ()。

A. $\frac{77}{315}$ B. $\frac{44}{315}$ C. $\frac{33}{315}$ D. $\frac{9}{122}$ E. 以上结论都正确

专题十 平面几何、解析几何-----基本知识点详解

平面几何部分

一、若干概念:

(一) 直线:

1、直线表示: 用直线上任意两点的字母表示这条直线, 例如, 直线 AB。或用一个小写字母表示,

例如: 直线 l 。

2、直线与点的位置关系: i) 点在直线上 (或直线经过某点) ii) 点在直线外 (或直线不经过某点)

3、直线的性质: 过两点有且只有一条直线 (两点确定一条直线)

(4) 直线之间的位置关系: i) 平行 (无公共交点); ii) 相交 (有一个公共交点); iii) 重合

(二) 线段: 直线上的两点和它们之间的部分叫做线段。

1、线段的表示: 和直线一致。

(三) 角:

1、定义: 有公共端点的两条射线组成的图形叫做角, 这个端点叫做角的顶点, 两条射线叫做角的边。

2、角的表示: (1) 用三个大写字母表示, 如 $\angle ABC$;

(2) 用顶点字母表示, 如 $\angle A$;

(3) 用数字表示, 如 $\angle 1$ 。

3、角的分类:

(1) 角按大小可分为三类:

锐角: 小于直角的角 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

直角: 平角的一半或 90° 的角 ($\alpha = 90^\circ$)

钝角: 大于直角而小于平角的角 ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

(2) 平角: 一条射线绕着端点旋转, 当终止位置与起始位置成一条直线时, 所成角叫做平角。

(3) 周角: 一条射线绕着端点旋转, 当终止位置又回到起始位置时所成的角叫周角。

(4) 互为补角: 如果两个角的和是一个平角 (180°), 那么这两个角叫做互为补角。

(5) 互为余角: 如果两个角的和是一个直角 (90°), 那么这两个角叫做互为余角。

4、角的度量:

(1) 度量单位: 度、分、秒

(2) 度量单位间的换算: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ (即 $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$)

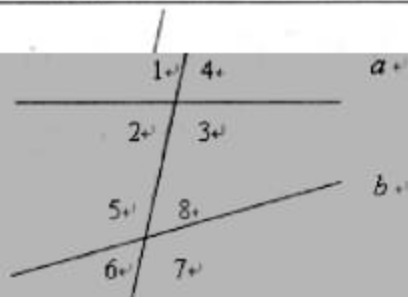
(3) 1° 平角 $= 180^\circ$, 1° 周角 $= 360^\circ$, 1° 直角 $= 90^\circ$

5、角的性质: 同角或等角的余角相等, 同角或等角的补角相等。

6、角的平分线: 如果一条射线把一个角分成了两个相等的角, 那么这条射线叫做这个角的平分线。

请找出右侧图形中的同位角:

- (1) 对顶角
- (2) 同位角
- (3) 内错角
- (4) 同旁内角



(四) 垂线: 互相垂直的两条直线中, 其中的一条叫做另一条的垂线。

1、垂线的性质: (1) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

(2) 直线外一点与直线各点连结的所有线段中, 垂线最短

(五) 平行线的性质:

1、平行线永不相交

2、两直线平行, 同位角、内错角、对顶角相等, 同旁内角互补;

如果两条平行线中的一条垂直于某直线, 那么另一条也垂直于该直线。

$$a \parallel b, a \perp c \Rightarrow b \perp c.$$

3、判定方法:

(1) 由定义判定: 平面内不相交的两条直线平行。

(2) 根据平行公理的推论判定: 平行于同一条直线的两条直线平行。

(3) 同位角相等, 两直线平行。

(4) 内错角相等, 两直线平行。

(5) 同旁内角互补, 两直线平行。

(6) 根据结论判定: 垂直于同一条直线的两条直线平行。

4、平行公理及推论:

(1) 公理: 经过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。

(2) 推论: 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行。

简述为: 平行于同一条直线的两条直线平行。

二、若干图形性质:

(一) 多边形的有关概念和性质

1、多边形的定义: 在平面内, 由不在同一直线上的一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形。

2、多边形的性质

(1) 多边形的内角和定理: 多边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$;

(2) 推论: 多边形的外角和是 360° 。

(二) 三角形的性质

1、三角形角与边之间的关系:

- (1) 内角和 180°
- (2) 三角形中任意一个角的外角等于和它不相邻的两内角之和
- (3) 两边之和大于第三边: $a+b>c$; 两边之差小于第三边: $a-b<c$

2、重点关注几类特殊三角形:

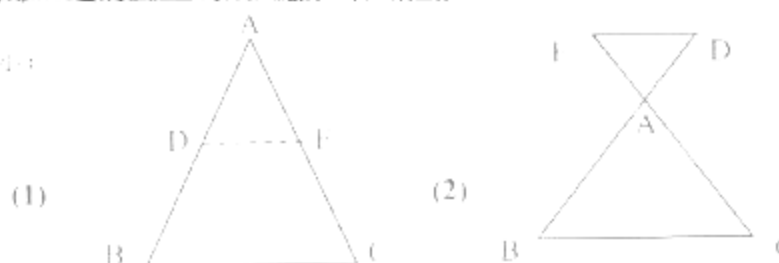
- (1) 等边三角形-思考有哪些性质
- (2) 等腰三角形-思考有哪些性质
- (3) 直角三角形-思考有哪些性质

- i) 两锐角 ()
- ii) 如果有一个角为 30° ()
- iii) 三个边之间有什么关系 () 定理
- iiii) 斜边的中线等于 ()

3、相似三角形:

- (1) 平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线), 所得的对应线段成比例

如下图所示:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}; \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}; \quad \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

- (2) 如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边.

- (3) 相似比的定义: 相似三角形对应边的比(k)叫做相似比(或相似系数)

i) 相似三角形的判定:

判定定理 1: 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等, 那么这两个

相似:

判定定理 2: 如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例, 并且夹角相等, 那么这两个三角形相似;

判定定理 3: 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例, 那么这两个三角形相似;

ii) 直角三角形相似的判定

(1) 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例, 那么这两个直角三角形相似;

(2) 同一个锐角对应相等的两个直角三角形相似;

(3) 两条直角边对应成比例的两个直角三角形相似;

(4) 直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形相似.

(4) 相似三角形的性质:

i) 对应角相等, 对应边成比例;

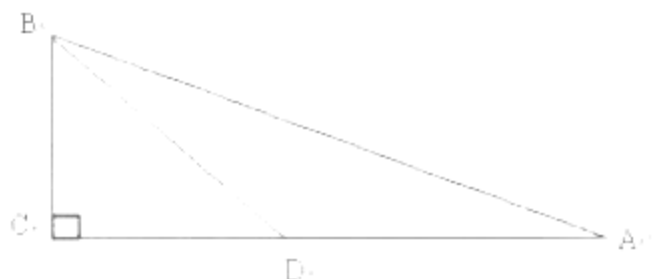
ii) 相似三角形的对应角平分线的比等于相似比;

iii) 相似三角形周长的比等于相似比;

iv) 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

热身训练:

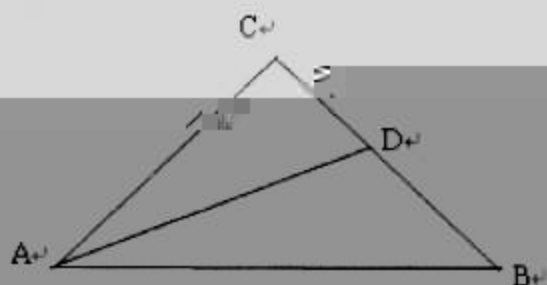
例 1. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle A = 15^\circ$, $BC = 1$, D 是 AC 的中点, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()



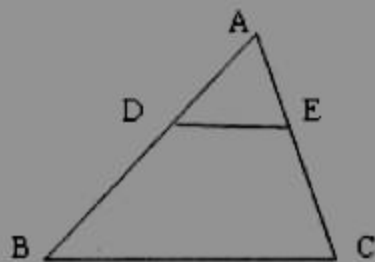
例 2. $AB < AC + CD$

(1) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线

(2) AB, AC, CD 分别代表三个不相等的数, 且 AB 是 AC, CD 的算术平均数



例 3、已知在三角形 ABC 中, D 是 AB 上的一点, $DE \parallel BC$ 并交 AC 于点 E , 若 $AD:AB=1:3$, 且 $CE=4$, 则 $AE=(\quad)$



(三) 四边形的性质

1、四边形的性质

(1) 定理: 四边形的内角和是 360° ;

(2) 推论: 四边形的外角和是 360° 。

2、平行四边形的性质及判定方法

(1) 平行四边形的定义: 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。

(2) 平行四边形的性质

i) 平行四边形的对边相等, 对角相等;

ii) 平行四边形的对角线互相平分;

(3) 平行四边形的判定方法

i) 定义判定;

ii) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形;

ii) 两组对角分别相等的四边形是平行四边形;

iii) 对角线互相平分的四边形是平行四边形;

4. 矩形的性质及判定方法

(1) 矩形的定义: 有一个角是直角的平行四边形叫做矩形;

(2) 矩形的性质

i) 矩形的对角线相等;

ii) 矩形具有平行四边形的一切性质;

(3) 矩形的判定方法:

i) 定义判定;

ii) 有三个角是直角的四边形是矩形;

iii) 对角线相等的平行四边形是矩形;

5. 菱形的性质及判定方法

(1) 菱形的定义: 有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形;

(2) 菱形的性质

i) 菱形的四条边相等;

ii) 菱形的对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角;

iii) 菱形也具有平行四边形的一切性质;

(3) 菱形的判定方法

i) 定义判定;

ii) 四条边都相等的四边形是菱形;

iii) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形;

6. 正方形的性质及判定方法

(1) 正方形的定义: 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形;

(2) 正方形的性质

i) 正方形的四个角都是直角, 四条边都相等;

ii) 正方形的两条对角线相等, 并且互相垂直平分; 每条对角线平分一组对角;

iii) 正方形具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质;

(3) 正方形的判定方法

- i) 定义判定;
- ii) 有一组邻边相等的矩形是正方形;
- iii) 对角线互相垂直的矩形是正方形;
- iiii) 有一个角为直角的菱形是正方形;
- iiiii) 对角线相等的菱形是正方形。

7、梯形的概念及判定方法

(1) 梯形的定义: 一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫梯形。

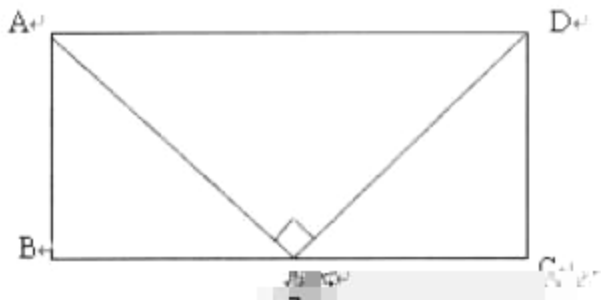
- i) 等腰梯形: 两腰相等的梯形叫做等腰梯形。
- ii) 直角梯形: 一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形。

(2) 梯形的判定方法

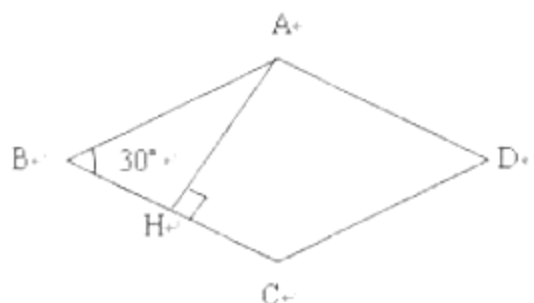
- i) 定义判定;
- ii) 对角线相等的梯形是等腰梯形;
- iii) 在同一底上的两个底角相等的梯形是等腰梯形。

热身训练

例 1、如右图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, 且 $EA \perp ED$, 若矩形的周长为 48 cm , 则矩形 $ABCD$ 的面积为 () cm^2



例 2 如图, 菱形内半相邻的角之比为 1:5, 它的高为 15cm, 那么它的周长为 () cm



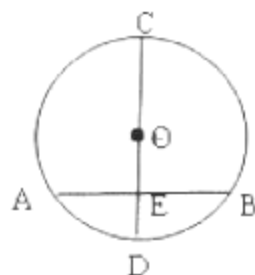
(四) 圆

1、垂径定理及其推论

(1) 垂径定理: 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧。

(2) 垂径定理推论: 平分弦(不是直径)的直径

垂直于弦, 并且平分弦所对的两条弧。



2、圆心弧、弧、弦、弦心距之间的关系

(1) 定理: 在同圆或等圆中, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对的弦相等, 所对的弦心距相等。

(2) 推论: 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角, 两条弧, 两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等。

注意事项: 一定要注意前提条件: 必须是在同一圆或等圆中。

3、圆周角定理及推论

1、圆周角定理: 一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

2、推论 1: 同弧或等弧所对的圆角相等; 同圆或等圆中, 相等的圆周角所对的弧也相等。

推论 2: 半圆(或直径)所对的圆周角是直角; 90° 的圆周角所对的弦是直径。

4、圆内接四边形定理

定理: 圆的内接四边形的对角互补并且任何一个外角都等于内对角。

5、切线的性质定理与判定

定理: 圆的切线垂直于经过切点的半径。

推论 1: 经过圆心且垂直于经过切点的半径。

推论 2: 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

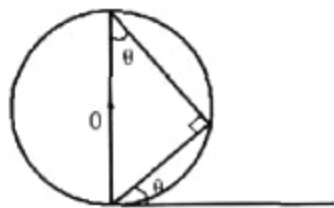
6、切线长定理

从圆外一点到圆的两条切线, 它们的切线长相等, 圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。

7、弦切角定理

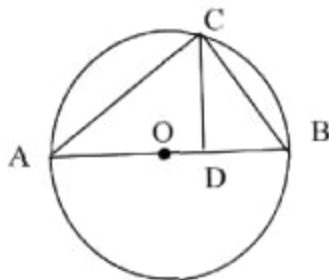
弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。

推论: 如果两个弦切角所夹的弧相等, 那么这两个弦切角也相等。



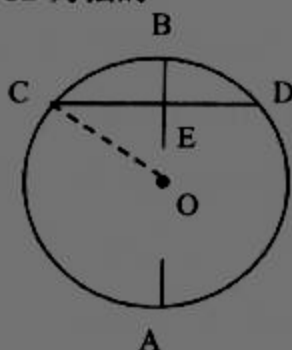
热身训练:

例 1, 如右图所示, AB 为圆 O 的直径, 弦 $AC = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , 那么 CD 的长为 _____ cm



例2.圆 O 的直径 AB 长34,一弦 CD 长为16,已知 $AB \perp CD$,那么以 CD 为弦的弓形高为()

- A. $\sqrt{33}$ B. 2 C. 32 D. 2或32 E. 以上均不对

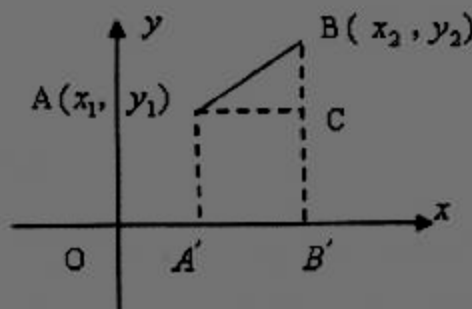


解析几何部分

(一) 基本定义和公式

1、两点距离公式:

如右图, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



2、有向线段的定比分点坐标

设点 $P(x, y)$ 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ $\{A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)\}$ 的定比分点, 且 $\frac{AP}{PB} = \lambda$ (定比)

则有下列结论: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, 且 $\lambda = \frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$

3、特殊情况, 当 $\lambda = 1$ 时, $P(x, y)$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 的中点 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

4、直线的斜率

(1) 定义: 倾斜率不是 90° 的直线, 它的倾斜角的正切值叫做这条直线的斜率。

直线的斜率常用 k 表示, 即 $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$)

(2) 公式: 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 的直线的斜率公式为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5、两直线夹角公式:

(1) l_1 到 l_2 的角的概念:

设两条直线 l_1 与 l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 k_2 \neq -1$,

直线 l_1 (逆时针旋转) 到 l_2 的角为 θ ($\theta \in (0, \pi)$),

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

(2) 夹角的定义:

一条直线到另一条直线所成的小于直角的角, 即两条直线所成的锐角叫做两条直线所成的角, 简称夹角。

并且规定, 当两条直线垂直时, 两条直线的夹角为 90° 。

l_1 与 l_2 的夹角范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 。

(3) 夹角公式:

设直线 l_1 与 l_2 的夹角为 α , 直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2 ,

$$\text{则 } \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (k_1 k_2 \neq -1)$$

当 $k_1 k_2 = -1$ 时,

6、点到直线的距离:

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离表示为: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(二) 直线的表示方法:

1、点斜式:

直线 L 的斜率为 k , 并且经过点 $p(x_1, y_1)$, 则直线 L 的方程为 $y - y_1 = k(x - x_1)$

当直线的倾斜角为 90° 时, $x = x_1$

当直线的倾斜角为 0° 时 $y = y_1$

2、斜截式:

直线 L 的斜率为 k , 且与 y 轴的交点为 $(0, b)$, 则直线 L 的方程为:

$y = kx + b$ 它不能表示倾斜角为 90° 的直线。

3、两点式:

直线 L 经过 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$, 则直线 L 的方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 。

它不能表示倾斜角为 0° 和 90° 的直线。

4、截距式:

直线 L 经过 $A(a, 0), B(0, b), a, b \neq 0$, 则直线 L 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 它不能表示 a, b 不存在或零的直线。

5、一般式:

关于 x 和 y 的一次方程都表示一条直线, 我们把方程写为 $Ax + By + C = 0$

(三) 直线之间的关系判定:

1、两条直线平行的判定:

对于两条不重合的直线 l_1, l_2 其斜率分别为 k_1, k_2 , 有 $l_1 \parallel l_2$, 有 $k_1 = k_2$

2、两条直线垂直的判定:

设两条直线 l_1, l_2 其斜率分别为 k_1, k_2

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

3、两条直线相交的判定

若直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 相交, 则它们的交点坐标为方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

有唯一一组实数解。

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

4、两条平行直线的距离

间的距离为:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(四) 圆的方程的几种

1、圆的标准方程: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 其中圆心为 $A(a, b)$, 半径为 r

当圆心为原点时, 方程变为 $x^2 + y^2 = r^2$

2、圆的一般方程:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{则: } \left(X + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad \text{①}$$

(1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 为半径的圆

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程①表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

(五) 直线与圆的位置关系

直线 $l: Ax + By + C = 0$, 圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的半径为 r , 圆心 $M(a, b)$ 到直线的距离为 d 。设方程组

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad \text{②}$$

② 直线 l 与圆 M 相交 $\Leftrightarrow d < r$, 或方程组②有两组不同的实数解。

直线 l 与圆 M 相切 $\Leftrightarrow d = r$, 或方程组②有两组相同的实数解。

直线 l 与圆 M 相离 $\Leftrightarrow d > r$, 或方程组②无实数解。

(六) 两个圆的位置关系:

圆 $C_1: (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = R^2$ 的圆心 $C_1(a_1, b_1)$, 半径 R ,

圆 $C_2: (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r^2$ 的圆心 $C_2(a_2, b_2)$ 半径 r ,

两圆的圆心距 $d = |C_1C_2|$

圆和圆的位置关系有:

$d > R + r$ 外离 (没有交点)

$d = R + r$ 外切 (有一个交点, 叫切点)

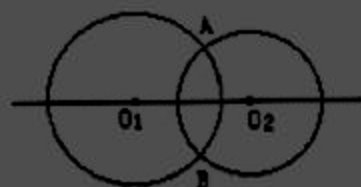
$R - r < d < R + r$ 相交 (有两个交点)

$d = R - r$ 内切 (有一个交点, 叫切点)

$0 \leq d < R - r$ 内含 (没有交点)

$d = 0$ (同心圆)

补充定理: 相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦。



(七) 必须记住的结论:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 0^\circ = 0; \quad \cos 0^\circ = 1; \quad \tan 0^\circ = 0; \quad \cot 0^\circ = +\infty$$

$$\sin 90^\circ = 1; \quad \cos 90^\circ = 0; \quad \tan 90^\circ = +\infty; \quad \cot 90^\circ = 0$$

解析几何部分热身训练:

例 1、(2008 年 1 月)以直线 $x+y=0$ 为对称轴且与直线 $y-3x=2$ 对称的直线方程为()

(A) $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ (B) $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ (C) $y = -3x - 2$

(D) $y = -3x + 2$ (E) 以上结论均不正确

例 2、(2008 年 1 月)两直线 $y=x+1$, $y=ax+7$ 与 x 轴围成的面积为 $\frac{27}{4}$

(1) $a=-3$; (2) $a=-2$

例3、已知两点 $P_1(3, -2)$, $P_2(-9, 4)$, 线段 P_1P_2 与 x 轴的交点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成比为 λ , 则有 ()

A. $\lambda = 2$, $P(1, 0)$ B. $\lambda = -2$, $P(-1, 0)$ C. $\lambda = -\frac{1}{2}$, $P(1, 0)$

D. $\lambda = \frac{1}{2}$, $P(-1, 0)$ E. 以上均不对

例4、已知圆 $x^2 + y^2 = 4$, 求斜率为 -1 的切线方程。

专题十：应用题解题法（归纳）：十大方法（系统班）

社科赛斯教育集团 MBA 培训中心

02、分析、综合法：一方面要认真考虑已知条件，另一方面还要注意题目中要解决的问题是什么，这样思维才有明确的方向性和目的性。

例：有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件，乙 7 件，丙 1 件，共需要 3.15 万元；若购甲 4 件，乙 10 件，丙 1 件，共需要 4.20 万元。问，购买甲、乙、丙各 1 件需要多少万元。

03、“分解法”：把一道复杂的应用题拆成几道基本的的应用题，从中找到解题的线索。

例：民用电收费规定，每月每户不超过 24 度按每度 9 角收费，超过 24 度时，超过部分按每度 2 元收费，并规定用电按整度收费。某月甲户比乙户多交电费 9 元 6 角，问甲户和乙户各用电多少度？

04、图解法：图解法是用画图或线段把题目的条件和问题明确地表示出来，然后“按图索骥”寻找解答应用题的方法。（一般用于行程问题）

例：一车队从 A 市到 B 市有一天的路程，计划上午比下午多走 100 千米到 C 市吃午饭。由于堵车，中午才赶到一个小镇，只行驶了原计划的三分之一，过了小镇，汽车赶了 400 千米，傍晚才停下来休息。司机说，再走从 C 市到这里路程的二分之一就到达目的地了。问 A、B 两市相距多少千米？

05、假设法：假设法就是解题时，对题目中的某些现象或关系做出适当的假设

例：冰箱厂生产一批冰箱，原计划每天生产 800 台，而实际每天比计划多生产了 120 台，结果比原计划提前 3 天完成了这批任务。实际用了多少天？

例：一辆货车从甲城开往乙城需 10 小时，一辆客车从乙城开往甲城需 6 小时，两车同时出发，相向而行，已知甲、乙两城相距 500 千米，几小时后两车相遇？

07、“倒推法”(还原法)!!从条件的终结点出发,逆向思考,从最后一步开始,逐步向前推算,从而解决问题的方法,称为倒推法或还原法。

例：某仓库放有货物，第一次运出了 $\frac{1}{2}$ ，第二次运出余下的一半小

甲每月存 200 元，存了 3 个月，甲储蓄的钱数是乙储蓄的钱数的 3 倍？

(3) 变中有不变——某一部分量不变: 例: 要从含盐 16% 的盐水 25 千克中蒸发去一部分水, 得到含盐 40% 的盐水, 应蒸发去多少千克水?

10、设数法: 有的题目含有某个不定的量, 按照一般的解题思路, 不易找出解题方法, 如果我把题目中某个不定量设定为具体的数, 就可以使原题化抽象为具体, 使难题变容易, 这种解题的思考方法称为设数法。(与“转化法”相反)

例: 小华参加爬山活动, 从山脚爬到山顶后, 按原路下山, 上山时每分钟走 20 米, 下山时每分钟走 30 米, 求小华上、下山的平均速度

附: 2010 年 1 月 MBA 入学考试数学真题

一、问题求解: 第 1-15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分, 下列每题给出四个选项 A、B、C、D, 其中只有一个选项是正确的, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑。

1. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

2. 某工厂生产的产品按质量分为 10 个档次, 第 1 档次每件产品可获利 8 元, 以后每提高一个档次, 每件产品可获利增加 2 元, 但每件产品所增加的成本也随之增加 2 元, 若该厂生产的产品每件成本为 40 元, 则每件产品可获最大利润为 ()

A. 28 元 B. 32 元 C. 34 元 D. 36 元 E. 40 元

3. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

4. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

5. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

6. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

7. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

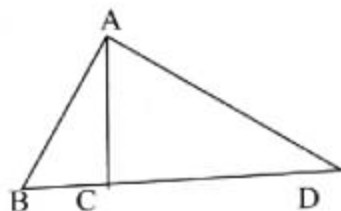
A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

8. 已知 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x^2 + 2y^2 + 1$ 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, 3]$ D. $[2, 4]$ E. $[1, 4]$

5. 如图 1. 在直角三角形 ABC 区域内部有座山, 现计划从 BC 边上某点 D 开凿一条隧道到点 A, 要求隧道长度最短, 一直 AB 长为 5km, AC 长为 12km, 则所开凿的隧道 AD 的长度约为

- (A) 4.12km (B) 4.22km (C) 4.42km (D) 4.62km (E) 4.92km



6. 某商店举行店庆活动, 顾客消费达到一定数量后, 可以在 4 中赠品中随即选取 2 个不同的赠品, 任意两位顾客所选赠品中, 恰有 1 件品种相同的概率是

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

7. 多项式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ 的两个因式是 $x-1$ 和 $x-2$, 则第三个一次因式为

- (A) $x-6$ (B) $x-3$ (C) $x+1$ (D) $x+2$ (E) $x+3$

8. 某公司的员工中, 拥有本科毕业证, 计算机登记证, 汽车驾驶证得的人数分别为 130, 110, 90, 又知只有一种证的人数为 140, 三证齐全的人数为 30, 则恰有双证的人数为

- (A) 45 (B) 50 (C) 52 (D) 65 (E) 100

9. 甲商品销售某种商品, 该商品的进价每件 90 元, 若每件定价 100 元, 则一天内能售出 500 件, 在此基础上, 定价每增 1 元, 一天能使少售出 10 件, 甲商店获得最大利润, 则该商品的定价应为

- (A) 115 元 (B) 120 元 (C) 125 元 (D) 130 元 (E) 135 元

10. 已知直线 $ax-by+3=0$ ($a>0, b>0$) 过圆 $x^2+4x+y^2-2y+1=0$ 的圆心, 则 $a-b$ 的最大值为

- (A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{11}{16}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{9}{8}$ (E) $\frac{9}{4}$

11. 某大学排除 5 名志愿者到西部 4 所中学指支教, 若每所中学至少有一名志愿者, 则不同的分贝方案共有

- (A) 240 种 (B) 144 种 (C) 120 种 (D) 60 种 (E) 24 种

12. 某装置的启动密码是由 0 到 9 中的 3 个不同数字组成, 连续 3 次输入错误密码, 就会导致该装置永久关闭, 一个仅记得密码是由 3 个不同数字组成的人能够启动此装置的概率为

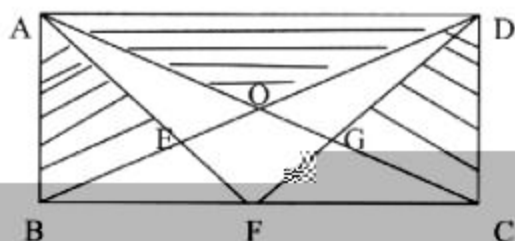
- (A) $\frac{1}{120}$ (B) $\frac{1}{168}$ (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{1}{720}$ (E) $\frac{3}{1000}$

13. 某居民小区决定投资 15 万元修建停车位, 据测算, 修建一个室内的费用为 5000 元, 修建一个室外车位的费用为 1000 元, 考虑到实际因素, 计划室外车位的数量不少于室内车位的 2 倍, 也不多于室内车位的 3 倍, 这笔投资最多可建车位的数量为

- (A) 78 (B) 74 (C) 72 (D) 66 (E) 60

14. 如图, 在正方形 ABCD 内部有一点 E, 若 $\angle EAB = \angle EBC = \angle ECD = \angle EDA = \alpha$, 则 $\sin \alpha$ 的值为

- (A) $32 m^2$ (B) $28 m^2$ (C) $24 m^2$ (D) $20 m^2$ (E) $16 m^2$



15. 再一次竞猜活动中, 设有 5 关, 如果连续通过 2 关就算闯关成功, 小王通过每关的概率都是 $\frac{1}{2}$, 他闯关成功得该率为

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{4}{8}$ (E) $\frac{19}{32}$

二、条件充分性判断: 第 16-25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分。要求判断每题给出得条件 (1)

(2) 能否充分支持题干所陈述的结论。A.B.C.D.E. 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题

求得判断, 在答题卡上将题选项字母涂黑。

- (A) 条件 (1) 充分, 单但条件 (2) 不充分
(B) 条件 (2) 充分, 单但条件 (1) 不充分
(C) 条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和条件 (2) 联合起来充分
(D) 条件 (1) 充分, 单但条件 (2) 不也分
(E) 条件 (1) 和条件 (2) 单独都不充分, 条件 (1) 和条件 (2) 联合起来也不充分

16. $a|a-b| \geq |a|(a-b)$

- (1) 实数 $a > 0$
(2) 实数 a, b 满足 $a > b$

17. 有偶数位来宾

- (1) 聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围, 且每位来宾与其邻座性别不同。
(2) 聚会时男宾人数是女宾人数的两倍。

18. 售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高

- (1) 售出 5 件甲商品, 4 件乙商品共获利 50 元

(2) 售出 4 件甲商品, 5 件乙商品共获利 47 元。

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 9, a_{10} = 10, a_{11} = 11, a_{12} = 12, a_{13} = 13, a_{14} = 14, a_{15} = 15, a_{16} = 16, a_{17} = 17, a_{18} = 18, a_{19} = 19, a_{20} = 20$

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$

(2) $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$

20. 已知 a, b, c 为实数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(1) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

(2) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$

21. 已知 a, b, c 为实数

(1) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

(2) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$

22. 某校有 50 名男生, 其中 26 名男生参加了校足球队, 其余男生参加了校篮球队, 已知足球队和篮球队的男生人数之和为 50 人。

(1) 在通过的女生中, 女生人数为多少?

(2) 在男生中未通过的人数比通过的人数多 6 人。

23. 已知 a, b, c 为实数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(1) 甲企业一月份的产值为 a , 以后每月产值的增长率为 p

(2) 甲企业一月份的产值为 $\frac{a}{2}$, 以后每月产值的增长率为 $2p$

24. 设 a, b 为非负实数, 则 $a + b \leq \frac{5}{4}$

(1) $ab \leq \frac{1}{16}$

(2) $a^2 + b^2 \leq 1$

25. 如图 3, 在三角形 ABC 中, 已知 $EF \parallel BC$, 则三角形 AEF 的面积等于梯形 $EBCF$ 的面积

(1) $|AG| = 2|GD|$ (2) $|BC| = \sqrt{2} |BF|$

