

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学农试题

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \ln(1 + 2x)} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$.

(16) 设函数 $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ ，求曲线的凹凸区间，拐点和渐近线。

(17) 计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(18) 计算二重积分 $\iint_D (x-1)ye^{xy} dy$ ，其中区域 D 由曲线 $x=1+\sqrt{y}$ 和直线 $y=1-x$ 及 $y=1$ 围成。

(19) 设函数 $f(x)$ 对任意的 x, y 恒有 $f(x+y) = e^x f(x) + e^y f(y)$ ，且 $f'(0) = e$ ，求 $f(x)$ 。

(20) (本题满分 11 分)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

(I) 求方程组的通解 (II) 求使 $x_1 = x_2$ 的全部解。

(21) (本题满分 11 分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(I) 求可逆矩阵 P 和 Λ ，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ (II) 求 A^{101} 。

(22) 设箱中有 5 件产品，其中 3 件是优质品，从该箱中任取 2 件，以 X 表示所取的 2 件产品中的优质品数， Y 表示 3 件剩余产品中的优质品件数。

(I) 求 (X, Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X, Y)$

(23) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(I) 求 X 的概率密度 $f(x)$ ；

(II) 求 $P\{|X| > 1\}$ ；

(III) 求 $E(e^{-X})$.



万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学农试题答案

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$.

【解析】 $\frac{1}{2}$

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \ln(1+2x)}{\ln(1+2x) \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \ln(1+2x)}{2x2x}$$

$$\because \sin 2x = 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^3) - \left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) \right)}{2x2x}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(16) 设函数 $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ ，求曲线的凹凸区间，拐点和渐近线。

【答案】曲线的凹区间为： $(-\infty, -1)$ 及 $(1, +\infty)$ ；曲线的凸区间为： $(-1, 1)$ 拐点为： $x=1, x=-1$

水平渐近线： $y=1$

【解析】

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -xe^{\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} = (x^2 - 1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

令 $f''(x) > 0$ 得 $x > 1$ 或 $x < -1$ ，

令 $f''(x) < 0$ ，得 $-1 < x < 1$ ，

由函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{2-x^2} + 1} \right) = 1,$$

$y=1$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{2-x^2} + 1}}{x} = 0, \text{ 无斜渐近线。}$$

又函数无间断点，因此函数没有垂直渐近线。

(17) 计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

【解析】 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{\substack{\text{令 } \arcsin x = t \\ x = \sin t}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{t \sin t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \sin t dt$

$$= [-t \cos t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi.$$

(18) 计算二重积分 $\iint_D (x-1) y dx dy$ ，其中区域 D 由曲线 $x=1+\sqrt{y}$ 和直线 $y=1-x$ 及 $y=1$ 围成。

【解析】 $\iint_D (x-1) y dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{y}+1} (x-1) y dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - y^3) dy$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

(19) 设函数 $f(x)$ 对任意的 x, y 恒有 $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$ ，且 $f'(0) = e$ ，求 $f(x)$ 。

【答案】 $f(x) = \frac{e}{2} (e^x - e^{-x})$

【解析】 令 $x=y=0$ 则有 $f(0) = 2f(0)$ 即 $f(0) = 0$ 。另外

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y f(x) + e^x f(y) - f(x)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} f(x) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} e^x \\
 &= f(x) + f'(0) e^x \\
 &= f(x) + e^{x+1}
 \end{aligned}$$

可得微分方程 $\frac{df(x)}{dx} - f(x) = e^{x+1}$ 故可解的

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\int (-1) dx} \left(\int e^{x+1} \cdot e^{\int dx} dx + C \right) \\
 &= e^{-x} \left(\int e^{2x+1} dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{2} e^{x+1} + \frac{C}{e^x}
 \end{aligned}$$

由 $f'(x) = \frac{1}{2} e^{x+1} - \frac{C}{e^x}$ 则由 $f'(0) = \frac{e}{2} - C = e$ 可知 $C = -\frac{e}{2}$

故 $f(x) = \frac{e}{2} (e^x - e^{-x})$ 。

(20) (本题满分 11 分)

$$\begin{cases}
 x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\
 x_1 \quad \quad - x_3 + x_4 = 2 \\
 3x_1 - x_2 \quad \quad + x_5 = 5
 \end{cases}$$

(I) 求方程组的通解 (II) 求使 $x_1 = x_2$ 的全部解。

【答案】方程通解为 $y = k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，使得 $x_1 = x_2$ 的全部解为 $y = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。

【解析】初等变换方程组有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

可得 $x_4 = 0$ ，另外得到方程组的通解为 $y = k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

将 $x_1 = x_2$ 代入原方程组消去 x_2 即有方程组 $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$

故有 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1]{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$

即可得 $x_4 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{5}{2}$ 。此时有解 $y = \left(\frac{5}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right)^T$ 。

(21) (本题满分 11 分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(I) 求可逆矩阵 P 和 Λ ，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ (II) 求 $A^{101}, \dots$

【解析】 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1,$$

当 $\lambda_1 = 3$ 时，

$$3E - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量是 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$

$$-E - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量是 $\xi_2 = (-1, 1, 0)$ 和 $\xi_3 = (0, 0, 1)$

于是取 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{101} = P \Lambda^{101} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 3^{101} \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^{101}-1}{2} & \frac{3^{101}+1}{2} & 0 \\ \frac{3^{101}+1}{2} & -\frac{3^{101}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(22) 设箱中有 5 件产品，其中 3 件是优质品，从该箱中任取 2 件，以 X 表示所取的 2 件产品中的优质品数， Y 表示 3 件剩余产品中的优质品件数。

(I) 求 (X, Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X, Y)$

【解析】(I) 由题意知 $X+Y=3$, X 的可能取值为 $i=0,1,2$, Y 的可能取值为 $j=3-i$.

$$P\{X=0, Y=0\}=0, P\{X=0, Y=1\}=0, P\{X=0, Y=2\}=0,$$

$$P\{X=0, Y=3\}=\frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},$$

$$\text{类似, } P\{X=1, Y=2\}=\frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}, P\{X=2, Y=1\}=\frac{C_2^2 C_1^0}{C_5^2}=\frac{2}{10},$$

所以, (X, Y) 的概率分布为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	0	$\frac{3}{5}$	0
2	0	$\frac{3}{10}$	0	0

(II)

$$E(XY)=1 \times 2 \times \frac{3}{5} + 2 \times 1 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5},$$

$$E(X)=0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5},$$

$$E(Y)=1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5},$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -3.6.$$

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

$$(23) \quad \text{设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 X 的概率密度 $f(x)$;

(II) 求 $P\{|X| > 1\}$;

(III) 求 $E(e^{-X})$.

【解析】(I) $f(y) = E'(y) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(II) $P(|X| > 1) = P(X > 1) + P(X < -1) = 1 - F(1) + F(-1) = 1 - (1 - 2e^{-1}) + 0 = 2e^{-1}$.

(III) $E(e^{-X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} xe^{-x} dx = \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x de^{-2x}$
 $= -\frac{1}{2} \left(xe^{-2x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$



万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP