

2012 考研数学三真题

已知函数 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 在点 $(1, 1)$ 处取得极值，求该函数的极值.

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，求 $f'(0)$.

$$f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$$

求 $f'(0)$.

$$(-1)^{n-1}(n-1) \cdots (-1)^n(n-1)$$

$$(-1)^{n-1}n! \cdots (-1)^n n$$

$$f(t) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr$$

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$$

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$$

$$\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$$

$$\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha} \cdots \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}} \cdots \alpha$$

求 α .

$$\|\alpha\| \leq \frac{1}{2} \|\alpha\| \quad \|\alpha\| \leq \frac{1}{2} \|\alpha\|$$

$$\|\alpha\| \leq \frac{3}{2} \|\alpha\| \quad \|\alpha\| \leq \frac{3}{2} \|\alpha\|$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$$

$$N(0, 1) \quad t(1) \quad \chi^2(1) \quad F(1, 1)$$

$$\frac{1}{\cos x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln x$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}, y = f(f(x)), \text{求 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$$

$$z = f(x, y) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0,$$

$$dz|_{(0,1)} =$$

$$= \frac{4}{x} \quad y = x \quad y = 4x$$

$$BA^*$$

$$A, B, C \quad A, C \quad P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3},$$

$$P(ABC) =$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 - 2\cos x}{x^4}$$

求下列函数的极值

$$\iint_D e^{xy} dx dy \quad D: 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1$$

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z$$

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

求下列函数的极值

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$$

求下列函数的极值

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0, \quad f'(x) + f(x) = 2e^x$$

求下列函数的极值

$$y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$$

求下列函数的极值

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ □

□ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ $Ax =$ □ □ □ □ □ □ □ a □ □ □ □ $Ax =$ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix},$ □ □ □ $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ a □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ $x = Qy$ □ f □ □ □ □ □ □ □

□

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ $X^T Y$ □ □ XY □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □	□ □	□ □	□ □
□ □	$\frac{1}{2} \square$	$\frac{1}{3} \square$	$\frac{1}{6} \square$

□

□ □	□ □	□ □	□ □
□ □	$\frac{1}{3} \square$	$\frac{1}{3} \square$	$\frac{1}{3} \square$

□

□

□

□□□	□□	□□	□□	□□
□□	$\frac{7}{12}$ □	$\frac{1}{3}$ □	□□	$\frac{1}{12}$ □

□ □ □ □ $P(X \cap Y)$ □ □ □

□ □ □ $\text{cov}(X - Y, Y) = \rho_{XY}$ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ X □ Y □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$V = \min(X, Y), U = \max(X, Y).$ □

□ □ □ □ □ □ □ □ V □ □ □ □ □ □ □ □ $E(U + V)$ □ □

□

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题解析

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 【答案】 C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 是

第 11 页

第 12 页

第 13 页



$$\text{故 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

故选 (B)。

(7) 【答案】 (D)

【解析】 由题意得, $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

$P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 表示单位圆在第一象限的部分, 被积函数是 1, 故根据二重积

分的几何意义, 知 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\pi}{4}$, 故选 (D)。

(8) 【答案】 (B)

【解析】 从形式上, 该统计量只能服从 t 分布。故选 B。

具体证明如下: $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3 + X_4 - 2}} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$, 由正态分布的性质可知, $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均

服从标准正态分布且相互独立, 可知 $\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}} \sim t(1)$ 。

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 【答案】 $e^{\sqrt{2}}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right]}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right] &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4} \right)}{-\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{2}{-\sqrt{2}} \\
 &= -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right]} = e^{-\sqrt{2}}$

(10) 【答案】: 4

【解析】: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'(f(x))f'(x) \Big|_{x=0} = f'(f(0))f'(0) = f'(-1)f'(0)$

由 $f(x)$ 的表达式可知 $f'(0) = f'(-1) = 2$, 可知 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 4$

(11) 【答案】: $2dx - dy$

【解析】: 由题意可知分子应为分母的高阶无穷小, 即 $f(x, y) = 2x - y + 2 + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$.

所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 2$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)} = -1$, 故 $dz \Big|_{(0,1)} = 2dx - dy$

(12) 【答案】: $4 \ln 2$

【解析】: 被积函数为 1 的二重积分来求, 所以

$$S = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{4}}^y dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^{\frac{4}{y}} dx = \frac{3}{2} + 4 \ln 2 - \frac{3}{2} = 4 \ln 2$$

(13) 【答案】: -27

【解析】: 由于 $B = E_{12}A$, 故 $BA^* = E_{12}A \cdot A^* = |A| E_{12} = 3E_{12}$,

所以, $|BA^*| = |3E_{12}| = 3^3 |E_{12}| = 27 * (-1) = -27$.

(14) 【答案】: $\frac{3}{4}$

【解析】: 由条件概率的定义, $P(AB|\bar{C}) = \frac{P(ABC)}{P(\bar{C})}$.

其中 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$P(ABC) = P(AB) - P(ABC) = \frac{1}{2} - P(ABC)$, 由于 A, C 互不相容, 即 $AC = \phi$, $P(AC) = 0$, 又

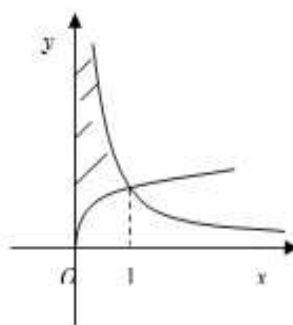
$ABC \subset AC$, 得 $P(ABC) = 0$, 代入得 $P(ABC) = \frac{1}{2}$, 故 $P(AB|\bar{C}) = \frac{3}{4}$.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

$$\begin{aligned}
 (15) \text{ 【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} - 1}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^2)\right)}{x^4} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^2)}{x^4} \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

(16) 【解析】: 由题意知, 区域

$D = \{(x, y) | 0 < x \leq 1, \sqrt{x} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$, 如图所示所以



$$\begin{aligned}
 \iint_D e^x xy dx dy &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy dy \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^x x^2 dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e - 1 - e^x x^2 \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x x dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + 2 \int_0^1 x de^x \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + 2 \left(e^x x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + 2(e - (e - 1)) \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(17) 【解析】: 1) 设成本函数为 $C(x, y)$, 由题意有: $C'_x(x, y) = 20 + \frac{x}{2}$.

对 x 积分得, $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + D(y)$.

再对 y 求导有, $C'_y(x, y) = D'(y) = 6 + y$.

再对 y 积分有, $D(y) = 6y + \frac{1}{2}y^2 + c$

所以, $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{1}{2}y^2 + c$

又 $C(0, 0) = 10000$, 故 $c = 10000$, 所以 $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{1}{2}y^2 + 10000$

2) 若 $x + y = 50$, 则 $y = 50 - x (0 \leq x \leq 50)$, 代入到成本函数中, 有

$$\begin{aligned} C(x) &= 20x + \frac{x^2}{4} + 6(50 - x) + \frac{1}{2}(50 - x)^2 + 10000 \\ &= \frac{3}{4}x^2 - 36x + 11550 \end{aligned}$$

所以, 令 $C'(x) = \frac{3}{2}x - 36 = 0$, 得 $x = 24, y = 26$, 这时总成本最小 $C(24, 26) = 11118$

3) 总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本为 $C'_x(24, 26) = 32$, 表示在要求总产量为 50 件时, 在甲产品为 24 件, 这时要改变一个单位的产量, 成本会发生 32 万元的改变.

(18) 【解析】: 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \end{aligned}$$

$$= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+x}{1-x^2} \cdot 2x - \sin x$$

$\frac{x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1-x^2}{1-x^2} \cdot 2x - \sin x \geq 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0$, $\frac{1-x}{1-x^2} \geq 0$

故 $f'(x) \geq 0$, 而 $f(0) = 0$, 即得 x

$$\ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$$

$$\text{所以 } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1.$$

$$\text{当 } -1 < x < 0, \text{ 有 } \ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1, \text{ 所以 } \frac{1+x^2}{1-x^2} x - \sin x \leq 0,$$

$$\text{故 } f'(x) \geq 0, \text{ 即得 } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$$

$$\text{可知, } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$$

(19) 【解析】

1) 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$. 齐次微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解

为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 可知 $C_1 = 1, C_2 = -1$.

$$\text{故 } f(x) = e^x - e^{-2x}$$

$$2) \text{ 曲线方程为 } y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ 则 } y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt, y'' = 2x + 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

令 $y'' = 0$, 为了说明 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解, 我们来讨论 y'' 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时的符号.

当 $x > 0$ 时, $2x > 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$, 可知 $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时,

$2x < 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt < 0$, 可知 $y'' < 0$. 可知 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解.

同时, 由上述讨论可知曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 在 $x = 0$ 左右两边的凹凸性相反, 可知 $(0, 0)$ 点是曲线

$y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 唯一的拐点.

$$(20) \text{ 【解析】 } (1) \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2 \end{pmatrix} \\
 (II) & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解, 则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$, 可知 $a=-1$.

此时, 原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 进一步化为行最简形得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故其通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解, 有 $|A|=0$.

即: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 得 $\lambda=1$ 或 -1 .

当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 显然不符, 故 $\lambda=-1$.

(21) 【解析】1) 由 $r(A^T A) = r(A) = 2$ 可得,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad f &= x^T A^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3
 \end{aligned}$$

$$\text{则矩阵 } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

解得 B 矩阵的特征值为: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6$

$$\text{对于 } \lambda_1 = 0, \text{ 解 } (\lambda_1 E - B)X = 0 \text{ 得对应的特征向量为: } \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{对于 } \lambda_2 = 2, \text{ 解 } (\lambda_2 E - B)X = 0 \text{ 得对应的特征向量为: } \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{对于 } \lambda_3 = 6, \text{ 解 } (\lambda_3 E - B)X = 0 \text{ 得对应的特征向量为: } \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

将 η_1, η_2, η_3 单位化可得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

(22) 【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

$$(1) P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$(2) \text{cov}(X - Y, Y) = \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y)$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = EXY - EXEY, \text{ 其中 } EX = \frac{2}{3}, EX^2 = 1, EY = 1, EY^2 = \frac{5}{3}, DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, EXY = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以, } \operatorname{cov}(X, Y) = 0, \operatorname{cov}(Y, Y) = DY = \frac{2}{3}, \operatorname{cov}(X - Y, Y) = -\frac{2}{3}, \rho_{XY} = 0.$$

(23) 【解析】

$$(1) X \text{ 概率密度为 } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \text{ 分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} X \text{ 和 } Y \text{ 同分布.}$$

$$\text{由 } V = \min(X, Y), F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\{\min(X, Y) \leq v\} = 1 - P\{X > v, Y > v\}.$$

$$\text{而 } X, Y \text{ 独立, 故上式等于 } 1 - P\{X > v\}P\{Y > v\} = 1 - [1 - F(v)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{故 } f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 同理, } U \text{ 的概率密度为: } f_U(u) = \begin{cases} 2(1 - e^{-u})e^{-u}, & u > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$EU = \int_0^{+\infty} u \cdot 2(1 - e^{-u})e^{-u} du = \frac{3}{2}, EV = \int_0^{+\infty} v \cdot 2e^{-2v} dv = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } E(U + V) = E(U) + E(V) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$