

2013 数三真题及答案解析

一、选择题 1—8 小题. 小题 4 32 .

$x \rightarrow 0$ $o(x)$ x 高阶的无穷 则 的

$$x \cdot o(x^2) = o(x) \quad o(x)o(x^2) = o(x)$$

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2) \quad o(x) + o(x^2) = o(x^2)$$

高阶无穷 的 的

$$x \rightarrow 0 \quad f(x) = x + x = o(x), g(x) = x = o(x) \quad f(x) + g(x) = o(x)$$

$o(x^2)$ 选

$$(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} \text{ 的 } \text{ 的}$$

$$x \ln|x| \rightarrow 0 \quad |x|^x - 1 = x \ln|x| - 1 \sim x \ln|x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x \ln|x|} = 1 \quad x = 0 \quad f(x) \text{ 的}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{2x \ln|x|} = \frac{1}{2} \quad x = 1 \quad f(x) \text{ 的}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{-(x+1)\ln|x|} = \infty \quad x = -1 \quad f(x) \text{ 的}$$

选

$$D_k \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ 的 } k \text{ 的 } I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy \text{ 则}$$

$$I_1 > 0 \quad I_2 > 0 \quad I > 0 \quad I_4 > 0$$

的

$$I_k = \iint_{D_k} y - x \, dx dy = \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (\theta - \theta r^2) dr = \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} \theta - \theta d\theta$$

$$= -\left(\theta + \theta \right) \Big|_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}$$



$$I_1 = I_2 = 0, I_3 = \frac{2}{3}\pi, I_4 = -\frac{2}{3}\pi \quad \text{选}$$

$\{a_n\}$ 则 选择 的

$$a_n > a_{n+1} \quad \text{则} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{则} \quad a_n > a_{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{则} \quad P > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$$

$$P > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n \quad \text{则} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

的 选 的 选 选 选 一

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{的}$$

选

n 阶 则

的 的 的 的 的

$$A = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, C = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

则 $\gamma_i = b_{i1}\alpha_1 + b_{i2}\alpha_2 + \dots + b_{in}\alpha_n \quad (i=1, 2, \dots, n)$ 的 的

$$A = CB^{-1} \quad \text{理 的}$$

的 的 的 选

$$6 \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{的}$$

$$a=0, b= \quad a=0 \quad b$$

$$a = , b = 0$$

$$a = 2 \quad b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的

的

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - (b +)\lambda + b - a^2)$$

$$2b - 2a^2 = 2b \quad a = 0 \quad b \quad \text{选择}$$

$$X_1, X_2, X$$

$$X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$$

$$P_i = P - 2 \leq X_i \leq 2 \quad \text{则}$$

$$P_1 > P > P$$

$$P > P_1 > P$$

$$P > P > P_1$$

$$P_1 > P > P$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{则} \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P_1 = \Phi() - 1 \quad P_2 = P\{- \leq X_2 \leq \} = P\left\{- \leq \frac{X_2}{2} \leq \right\} = \Phi -$$

$$P_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \leq \frac{X_3-5}{3} \leq \frac{2-5}{3}\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1)$$

$$P - P_2 = +\Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi < - \Phi <$$

选择

X 和 互独立 X 和 的概率 别

X				P
P	/	/, 4	/	/

	-		
P	/	/	/

$$\text{则 } P\{X + Y = 2\} =$$

$$\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}$$

选择

、填空题 本题 6 小题, 小题 , 满 2 . 答案填 题中横 上 ,

9 曲 $y=f(x)$ 和 $=x^2-x$ (1,0) 处有切 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ _____

$$(1)=0, \quad f'(1)=1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1+\frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2} \cdot \frac{n+2}{-2n}} = -2f'(1) = -2$$

$z=z(x,y)$ 方程 $(z+y)^x=xy$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)}=$ _____

$F(x,y,z)=(z+y)^x-xy$ 则

$$F_x(x,y,z)=(z+y)^x \ln(z+y)-y, F_z(x,y,z)=x(z+y)^{x-1}$$

$x=1, y=2 \quad z=0 \quad \frac{\partial}{\partial x}|_{(1,2)}=2-2\ln 2$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = -\int_1^{+\infty} \ln x \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$$

微 方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通 _____

方程的 方程 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$ 根 别 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ 方程通

$$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}} \quad \text{其} \quad C_1, C_2$$

$A=(a_{ij})$ 三阶非零 $|A|$ 其 A_{ij} 元素 a_{ij} 的代 余 满足

$A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 则 $|A|$ _____

$A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3) \quad A+A^{*T}=0$ 其 A 的伴

$$|A^*| = |A^{*T}| = |A|^{3-1} = -|A| \quad |A| = -1$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases} \quad A + A^{*T} = 0 \quad r(A) = r(A^*) \text{ 伴 的}$$

$$|A| = -1.$$

4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(Xe^{2X}) =$ _____

$$E(Xe^{2X}) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2} + 2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2+2) e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = e^2 E(X) + 2e^2 = 2e^2$$

$$2e^2$$

三、解答题

5. 本 满

$$x \rightarrow 0 \quad 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \sim ax^n \quad \text{无穷} \quad \text{求} \quad a, n$$

析 主 $x \rightarrow 0$ 见 的马克劳林展开

$$x \rightarrow 0 \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 - 2x^2 + o(x^2))(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)) = 7x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \sim ax^n \quad \text{无穷} \quad a = 7, n = 2$$

6. 本 满

、 曲 $y = \sqrt[3]{x}$ 直 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴 转成的平面图形 V_x, V_y 别 绕 x

轴和 y 轴旋转一周 形成的立体的体 $10V_x = V_y$ 求 a 的

微元

$$V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} a^{\frac{5}{3}} \pi$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a x f(x) dx = 2\pi \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{6}{7} a^{\frac{7}{3}} \pi$$

$$10V_x = V_y \quad a = 7\sqrt{7}$$

本 满
平面 曲 $x = 3y, y = 3x, x + y = 8$ 成 求 $\iint_D x^2 dx dy$

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_3^3 dy + \int_2^6 x^2 dx \int_3^{8-x} dy = \frac{416}{3}$$

本 满

的 成本 6 元 成本 元/ $P = 60 - \frac{Q}{1000}$, P
元 销 已 销平衡 求
的边际利润
P 5 的边际利润 并 释其经济
利润最大的 P

$$\text{利润 } y \text{ 则 } y = -(6000 + 20) = 40 - \frac{2}{1000} - 6000$$

$$\text{边际利润 } y' = 40 - \frac{Q}{500}.$$

P 5 边际利润
经济 P 5 销 每增加一 利润增加
令 $y' = 0 \quad Q = 20000, P = 60 - \frac{20000}{1000} = 40.$

9 本 满

$$(x) \quad [0, +\infty) \text{ 上 } (0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = 2 \text{ 证明}$$

$$a > 0 \quad (a) = 1;$$

$$\text{的 } a \quad \xi \in (0, a) \quad '(\xi) = \frac{1}{a}$$

$$\text{证明 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = 2 \quad X > 0 \quad x > X \quad \text{有 } \frac{3}{2} < (x) < \frac{5}{2}$$

$$\text{又 } (x) \quad [0, +\infty) \text{ 上连续 } (0) = 0 \quad \text{介 理 } a > 0 \quad (a) = 1;$$

(x) [0,a]上 导 拉 朗日 理

$$\xi \in (0,a) \quad f'(\xi) = \frac{f(a)-f(0)}{a} = \frac{1}{a}$$

本 满

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{问 } a, b \text{ 何}$$

$$AC - CA = B \quad \text{并求}$$



有

$$AC - CA = B \quad \text{果} \quad \text{则 须 阶的方} \quad C = \begin{pmatrix} x_1 & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } AC - CA = B \quad \text{形} \quad \begin{pmatrix} -x + ax & -ax_1 + x + ax \\ x_1 - x - x & x - ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$\text{方程} \quad \begin{cases} -x + ax = 0 \\ -ax_1 + x + ax = 1 \\ x_1 - x - x = 1 \\ x - ax = \end{cases} \quad \text{方程 须有 方}$$

程 的增广 进 初 换

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$



$$a = -1, b = 0$$

方程 有

$$AC - CA = B$$

$$(A|b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



方程 的通

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

就 满足 $AC - CA = B$ 的

$$C = \begin{pmatrix} 1+C_1+C_2 & -C_1 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{其 } C_1, C_2$$

本 满

$$\text{次 型 } f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

证明 次型 的 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

α, β 证明 换 的 形 $2y_1^2 + y_2^2$

证明

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \alpha\alpha^T \\ \beta\beta^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \alpha\alpha^T + \beta\beta^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



次型 的 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

证明 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T \quad |\alpha| = 1, \beta^T\alpha = 0$

则 $A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha|\alpha|^2 + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha \quad \lambda_1 =$ 的

$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta|\beta|^2 = \beta \quad \lambda_2 = 1$ 的

的 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2 \quad \lambda_3 = 0$ 的

一

换 的 形 $2y_1^2 + y_2^2$

本 满

(X, Y) 维 X 的边缘概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 给

$$X = x(0 < x < 1) \text{ 的 } \quad \text{的} \quad \text{概率密度} \quad f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$

的的边缘概率密度 $f_Y(y)$

(X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$

$$f(x, y) = f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x) = \begin{cases} \frac{9}{x^2}, & 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的的边缘概率密度 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x^2} dx = -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

本 满

$$\text{总体 } X \text{ 的概率密度} \quad f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{其 } \theta \text{ 未 参 大 零}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 来 总体 X 的简 样本

求 θ 的 估

求 θ 的 大 估

先求 总体的 学期望 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$$

$$\text{令 } E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \theta \text{ 的 估} \quad \hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$x_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta}{x_i^2} e^{-\frac{\theta}{x_i}} \right) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)} e^{-\theta \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)}$$

取 $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$

θ 的大 估 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$