

【解析】： $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2}$ 存在，必有 $f(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

， $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 就可写成 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ，即 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 存在，知

$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$ ，即 $f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \Delta x + \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ 。由定义知

知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微。选 (B)

() 设 $I = \int_0^{\pi} e^{-x^2} \sin x dx$ ， $k = \frac{1}{\pi}$ 有 D

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

【答案】: (D)

【解析】： $x \in (\pi, 2\pi)$ 时 $\sin x < 0$ ，知 $\int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin x dx < 0$ ，即 $I_2 - I_1 < 0$ ，知 $I_1 > I_2$ 。

又 $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx > 0$ ， $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx > \int_0^{\pi} x \sin x dx$ ，即 $I_1 > I_3$ 。

【解析】 $\because |(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 知 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。选 (C)。

() 设 A 为 n 阶矩阵, P 为 n 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ $Q^{-1}AQ =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【答案】: (B)

【解析】 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

选 (B)。

() 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 λ 与参数为 μ 的指数分布, $P\{X < Y\} =$ ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

【答案】: (A)

【解析】 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\{X < Y\} = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^y e^{-x-4y} dx dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-5y} dy = \frac{1}{5}, \text{ 选 (A)}$$

() 将长度为 l 的木棒随机地截成两段, 两段长度的相关系数为 ()

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

【答案】: (D)

【解析】：设两段长度分别为 X, Y ，显然 $X + Y = 1$ ，即 $Y = -X + 1$ ，两者线性关系，且负，所以系数为 -1 ，选 (D) 。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

() 函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ ， $f(x)$ 。

【答案】： e^x

【解析】：特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$ ，特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$ ，齐次方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ ， $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$ ，知 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 。

$f(x) = e^x$ 。

() $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx$ 。

【答案】： $\frac{\pi}{2}$

【解析】： $t = x - 1$ 得 $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx = \int_{-1}^1 (t+1) \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ 。

() $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)}$ 。

【答案】： $\{1, 1, 1\}$

【解析】： $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2,1,1)} = \left\{ y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} \right\} \Big|_{(2,1,1)} = \{1, 1, 1\}$

() 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ， $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ 。

【答案】： $\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】： 曲面 Σ 的方程为 $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，知 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_D y^2 \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy$ ，其中

$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 。数时 数 $\sqrt{3}$ 将数 题 长别 率数

得, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$ 即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ 。

$x=0$ 时, 显然有 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x = 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

知, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

() (题满分 分)

求 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的 。

【解析】: $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,

求函数的 :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases},$$

解得 为 $(1, 0), (-1, 0)$

$$f''_{xx} = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy} = -y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{yy} = -x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$(1, 0), \text{ 有 } A_1 = f''_{xx}(1, 0) = -2e^{-\frac{1}{2}}, B_1 = f''_{xy}(1, 0) = 0, C_1 = f''_{yy}(1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$$

所以, $A_1 C_1 - B_1^2 > 0, A_1 < 0$, $f(x, y)$ 在 $(1, 0)$ 得 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ 。

$$(-1, 0), \text{ 有 } A_2 = f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{-\frac{1}{2}}, B_2 = f''_{xy}(-1, 0) = 0, C_2 = f''_{yy}(-1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$$

所以, $A_2 C_2 - B_2^2 > 0, A_2 > 0$, $f(x, y)$ 在 $(-1, 0)$ 得 小 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ 。

() (题满分 分)

求 数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的 及 函数

【解析】: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}{2(n+1)+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} \cdot \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3} \right| = 1$

知 $x=1$ 及 $x=-1$ 时, 数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+n+1}{2n+1} x^{2n}$, 知 $x \in (-1, 1)$ 为幂级数的收敛域。

下在 数的 函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1}$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left\{ \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)t^{2n} \right] dt \right\}'$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^x t^{2n} dt \right\}' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1}$ $xS_1(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。根 项求 定 知 $[xS_1(x)]' = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}$,

$xS_1(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, $x \neq 0$ 时, 有 $S_1(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, $x=0$ 时, 有 $S_1(0) = 2$ 。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), & -1 < x < 1 \text{ 或 } 0 < x < 1 \\ 3, & x=0 \end{cases}$$

() (题满分 分)

知曲线 $L: \begin{cases} x=f(t) \\ y=\cos t \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} \right)$, 其中函数 $f(t)$ 有 数, 且 $f(0)=0$, $f(t)>0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$ 。

曲线 的 线与 的 的 为, 求函数 $f(t)$ 的, 求 曲线 与 与 的 的。

【解析】: () 曲线 L 在 一 (x, y) 的 线 率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{f'(t)}$, (x, y) 的 线为

$Y - \cos t = \frac{-\sin t}{f'(t)} (X - f(t))$, $Y=0$ 得 $X = '() \cos + ()$ 曲线 L 与 x y 的

的 为 1

有 $[\ f'(t) \cot t + (t) - (t)]^2 + \cos^2 t = 1$, 为 $f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$

所以 $f'(t) = \frac{\sin t}{\cot t}$, 两 时 定 分 得 $f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t + C$, $f(0) = 0$,

所以 $C = 0$ 函数 $f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t$

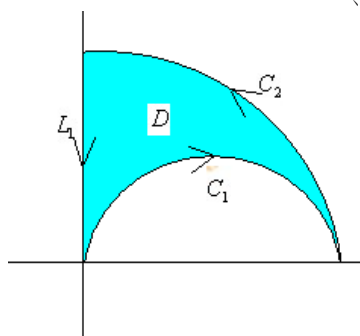
() 曲线 L 与 x y 的所 成的 的 的 为:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

() (题满分 分)

知 L 一 中从 $(0,0)$ $x^2 + y^2 = 2x$ $(2,0)$, $x^2 + y^2 = 4$ $(0,2)$ 的曲线
段, 曲线 分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

【 解】: 设 $x^2 + y^2 = 2x$ 为 C_1 $x^2 + y^2 = 4$ 为 C_2 , 线 即 设所 线 L_1 为



$x = 0 (0 \leq y \leq 2)$, 设 L 及 L_1 所 的 为 D ,

下 得:

$$= \int_{L+L_1} 3x^2 x + (x^3 + x - 2) dy - \int_{L_1} 3x^2 x + (x^3 + x - 2) dy$$

$$= \iint_D (3x^2 + 1 - 3x^2) dx dy - \int_2^0 -2y dy$$

$$= S_D - 4 = \frac{\pi}{2} - 4$$

() (题满分 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

() 求 $|A|$

() 知线方程 $Ax = \beta$ 有解, 求 a , 求 $Ax = \beta$ 的通解。

【 解】 ()
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

()
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & -a-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & -a-a^2 \end{pmatrix}$$

知要得线方程有解, 有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$, 知 $a=-1$ 。

时, 线方程矩阵为
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, 一为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 得

知出的解系为
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, 齐次方程的特解为
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, 其通解为
$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

线方程 $Ax = \beta$ 在个 λ 的解, 有 $|A| = 0$

即:
$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda)^2 (\lambda + \lambda) = 0, \text{ 得 } \lambda = 1 \text{ 或 } -1.$$

$\lambda = 1$ 时
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 显然符合, } \lambda = -1.$$

() (题满分 分) 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置, 知 $r(A^T A) = 2$, 且二次

$$f = x^T A^T A x.$$

1) 求 a

2) 求二次型对应的二次型矩阵, 将二次型化为标准型, 写出主元。

【解】: 1) $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1+a^2 \end{pmatrix}$ $r(A^T A) = 2$ 得,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1+a^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+1)^2(a^2+1) = 0, \text{ 知 } a = -1.$$

2) $f = x^T A^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$$

解得 B 矩阵的特征值为: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6$

1) $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2 = 2$, 解 $(\lambda_2 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\lambda_3 = 6$, 解 $(\lambda_3 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

将 η_1, η_2, η_3 单位化得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= EXY - EXEY, \text{ 其中 } EX = \frac{2}{3}, EX^2 = 1, EY = 1, EY^2 = \frac{5}{3}, DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \\ &= E^2 - (E)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \quad EXY = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \operatorname{cov}(X, Y) = 0, \operatorname{cov}(Y, Y) = DY = \frac{2}{3}, \operatorname{cov}(X - Y, Y) = -\frac{2}{3} \rho_{XY} = 0$$

() (题满分 分)

设随机 X 与 Y 互独立且分别服从 态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 未知参数且 $\sigma > 0$

设 $Z = X - Y$

— 求 z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$;

— 设 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 为来自总体 Z 的 随机 , 求 σ^2 的 然估 $\bar{\sigma}^2$;

— $\bar{\sigma}^2$ 为 σ^2 的 偏估 。

【解析】: () 为 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X 与 Y 互独立, $Z = X - Y \sim N(0, 3\sigma^2)$,

$$\text{所以, } Z \text{ 的概率密度为 } f(z, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, (-\infty < z < +\infty)$$

() 然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(z_i, \sigma^2) = \frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2} = (10\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(10\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{6(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0$$

$$\text{解得 然估 为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

$$\text{然估 为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

$$() E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n Z_i^2\right) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n EZ_i^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n [(EZ_i)^2 + DZ_i] = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n 3\sigma^2 = \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的 偏估 。