

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一 (1-8 小 , 每小 4 分, 共 32 分, 下列每小 出的四个 项中, 只有一项
正确, 把所 项前的字母填在 后的括号内.)

1. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ _____

3. 设 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则

$$\left(-\frac{9}{4}\right) = ()$$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

【考点分析】：傅里叶级数，收敛定理。

【求解过程】：C

注意观察本题目，和函数 $S(x)$ 形式为正弦级数，因此 $f(x)$ 是奇函数，同时观察 b_n 的形式，

得知周期为 2, $\left(-\frac{9}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{4}$ 为连续点，因此 $-S\left(\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

【方法总结】：傅里叶级数的题目类型比较单一，多数是考查和函数的求法和收敛定理的使用，收敛定理内容见高数（同济版下册）306 页，和函数求法见 316 页。

4. 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1$, $L_2: x^2 + y^2 = 2$, $L_3: x^2 + 2y^2 = 2$, $L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针

方向的平面曲线，记 $I_i = \int_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6}\right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) dy (i=1, 2, 3, 4)$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

- A. I_1 B. I_2 C. I D. I

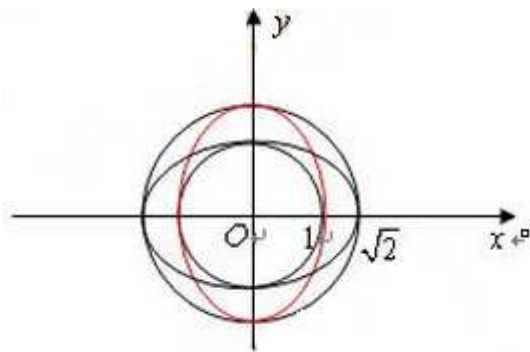
【考点分析】：格林公式。

【求解过程】：D

$$I_i = \int_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6}\right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) dy (i=1, 2, 3, 4) = \iint_{D_i} \left(2 - x^2 - 1 - \frac{y^2}{2}\right) (i=1, 2, 3, 4) \quad (\text{格林公$$

式) $= \iint_{D_i} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) (i=1, 2, 3, 4)$, 其中 D_i 表示 L_i 所围成的部分。如下图，红色部分 (D)

内部被积函数均为正值



可以发现被积函数在 D 内均为正值，且 D 面积大于 D_1 ，因此 $I > I_1$ 。

同时 D 的面积大于 D_2 ，并且包括 D_2 所有部分，而除去 D_2 的其他部分被积函数均为负值，因此 $I_4 > I_2$ 。

并且 D_1 的面积小于 D ，而 D 包括 D_1 所有部分，而除去 D_1 其他部分被积函数均为负值，因此 $I_1 > I$ 。

综上，最大为 I 。

【方法总结】： 本题考察格林公式的使用，转化为二重积分后亦可直接算出四个积分的值然后比较，但明显增加了计算量。关于格林公式的定义见高数（同济版下册）202 页。

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$ ，且 B 可逆，则（ ）

- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【考点分析】： 向量组等价定义。

【求解过程】： B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+a & b-\lambda & a-\lambda \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -a & \lambda-b & -2a \\ -1 & -a & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda [(\lambda-b)(\lambda-2) - 2a^2]$$

□ 明显只要 □ □ $a=0$ 即可使 A 的 □ □ 值 □ □ 上述条件。

【方法总结】： 本题考察列相似矩阵的定义。

7. 设 X_1, X_2, X_3 是 □ □ □ 量, 且 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,2^2)$, $X_3 \sim N(5,3^2)$,

$P_i = P\{-1 \leq X_i \leq 1\} (i=1, 2, 3)$, 则 ()

A. $P_1 > P_2 > P_3$ B. $P_2 > P_1 > P_3$ C. $P_3 > P_2 > P_1$ D. $P_1 > P_3 > P_2$

【考点分析】： □ □ 正 □ 分 □ 性 □。

【求解过程】： A

□ 部转化 □ □ □ 正 □ 分 □ 上。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0,1) \\ & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\{Y > c^2\} \\ &= P\{X^2 > c^2\} \\ &= P\{X > c\} + P\{X < -c\} \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

【方法总结】：□ 记 □ 大分 □ 的形式和性 □ 是解决本题的关 □。

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ □ 定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\left(\frac{1}{n}\right)-1]$ □ _____。

【考点分析】：□ 函数求 □, 极限。

【求解过程】：1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right] = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{[f(m)-1]}{m} = \lim_{m \rightarrow 0} f'(m) = f'(0) \text{ (设 } m \text{ 为 } n \text{ 的 } \square \text{ 数)}$$

方程 □ □ 两 □ 对 x 求 □, 得:

$$y' - 1 = e^{x(1-y)}(1 - -x'), \text{ □ } x=0 \text{ 时, □ □ 得 } y=1, \text{ □ 他们一并 □ □ 上式,}$$

得 ' , 因此极限的值为 1.

【方法总结】: $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 为 $0 \cdot \infty$ 型的极限, 此类极限求法为 □ □ 其化 □ $\frac{0}{0}$ 型 □ 者 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 然后使用洛必达法则, 等价无穷小代换 □ 者泰勒公式求得。

10. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$, $y_2=e^x-xe^{2x}$, $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常 □ 数非 □ 次线性 □ 分方程的 3 个解, 则该方程的 □ 解 $y=$ _____。

【考点分析】：二阶常 □ 数 □ 分方程求解。

$$\text{【求解过程】: } y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - x e^{2x}$$

容 □ 得知 $y_3=-xe^{2x}$ 是该方程的一个 □ 解, 而 y_1-y_3, y_2-y_3 为该方程对应的 □ 次方程的两个线性无关的 □ 解, □ □ 二阶常 □ 数非 □ 次线性 □ 分方程解的结 □ 得知, 该方程 □ 解为:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - x e^{2x}。$$

【方法总结】: 二阶常 □ 数 □ 分方程求解方法重在记 □, 其出题形式不多 □, 多多练习熟 □ 即可。关于其求法详解见高数(同济版上册) 325, 332 页

$$11. \text{ 设 } \begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases} (t \text{ 为参数}), \text{ 则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \text{_____}。$$

【考点分析】：□ 数方程求 □。

$$\text{【求解过程】: } \sqrt{2}$$

□ 求一阶 □ 数, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t - \sin t}{\cos t} = t$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sec t$, □ □ t 的值, □ 式 = $\sqrt{2}$ 。

【方法总结】: 对于 □ 数方程求 □ 和 □ 函数求 □ 的题目, □ 要 □ □ 求 □ 的过程, □ □ 对于其中二阶 □ 数 □ □ 高阶 □ 数的求法, □ □ □ 真对 □。

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点分析】: □ 常积分, 分部积分法。

【求解过程】: $\ln 2$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= -\int_1^{+\infty} \ln x \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= -\left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{1+x} \right) - 0 + \int_1^{+\infty} (\ln x - \ln(1+x)) \\ &= 0 - 0 + 0 - (-\ln 2) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

【方法总结】: 分部积分法的应用是本题的关 □, 对于常见函数的 □ 分积分公式的记 □ 也是不可 □ □ 的。

13. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非 □ 矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数 □ □ 式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 □ A □ □ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点分析】: □ □ 矩阵。

【求解过程】: -1

□ 题目条件 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 得知 $A_{ij} = -a_{ij}$, □ □ A 和 □ 的 □ □ 矩阵 □ □ 的关 □ 得知

$$A^* = -A^T \quad (1)$$

再 □ □ 公式 $AA^* = |A|E = -AA^T$, 两 □ □ 行列式 $-|A|^2 = |A|$ 解得:

$$|A| = 0 \text{ 或 } |A| = -1$$

而对于 A 对应的行列式如 □ 为 0, 由 (1) 得知与非 □ 阵的条件 □ □。

因此 $|A| = -1$ 。

【方法总结】: $AA^* = |A|E$, 该公式的使用极为简单, 一定要熟练掌握。

14. 设连续型随机变量 Y 的概率密度函数为 $f(y) = \frac{1}{e} e^{-y}$, a 为常数且大于 0, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}$

【考点分析】: 条件概率公式, 概率密度函数公式。

【求解过程】: $1 - \frac{1}{e}$ 。

$$\begin{aligned} & P\{Y \leq a+1 | Y > a\} \\ &= \frac{P\{a < Y \leq a+1\}}{P\{Y > a\}} \\ &= \frac{F(a+1) - F(a)}{1 - F(a)} \\ &= \frac{e^{-a} - e^{-(a+1)}}{e^{-a}} \\ &= 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

【方法总结】: 对于几个常见的分布函数的形式要牢记并熟练掌握。

三、解答题(15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^{1+x} \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

【考点分析】: 换元积分法, 分部积分法, 积分上限函数求导。

【求解过程】: $8 - 2\pi - 4\ln 2$ 。

被积函数有积分, 要用换元法去积分, 使用分部积分。

$$\begin{aligned} & \text{原式} \\ &= 2 \int_0^1 f(x) \sqrt{x} dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) \sqrt{x} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \dots\dots (\text{分部积分}) \\ &= 2 \cdot (1) - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \\ &= 0 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} dx \dots\dots (\text{积分上限函数求导}) \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx \\ &= -4 \int_0^1 \ln(1+x) \sqrt{x} dx \dots\dots (\text{分部积分}) \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{x} \ln(1+x) - 4 [\ln(1+x) \cdot \sqrt{x}] \Big|_0^1 \\ &= 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

□ 过计算后只 □ 求得 $4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ 的值即可。

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} \\ &= 4 \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 4 \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \\ &= 8 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= 8 - 8 \arctan x \Big|_0^1 \\ &= 8 - 2\pi \end{aligned}$$

综上所述，□ 式值为 $8 - 2\pi - 4 \ln 2$ 。

【方法总结】：换□ 积分法和分部积分法要熟练□ □，在□ □ 记□ 的基础上多多练习计算积分，就可以熟□ □ □，积分上下限函数求□ 方法要熟练□ □，其□ □ 方法见高数(同济版上册)237 页。

(16)(本题 10 分)

设数列□ a_n □ □ □ 条件： $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$ 。 $S(x)$ 是□ 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数。

(1) □ 明： $S'(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式。

【考点分析】：□ 分方程，□ 级数。

【求解过程】：

(1) □ 明： $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

求□ 得： $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

求二阶□ 数： $S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

□ □ 题目已知条件： $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$ 得知 $a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$ ，□ 得知：

$$S''(x) - S(x) = 0$$

□ □

(2) 由 (1) 得知 □ 分方程对应的 □ □ 方程为 $r^2 - 1 = 0$, 解得 $r_1 = 1, r_2 = -1$, 因此 $S(x)$ 为:

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

□ □ $S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1$, 解得 C_1, C_2 分 □ 为 2, 1。

综上所述, $S(x) = 2e^x + e^{-x}$ 。

【方法总结】: □ 级数求 □ 和积分的性 □ 要熟练 □ □ (同济高数下 276 页), □ 种常见的 □ 分方程解法 □ □ 记。

(17) (本题 □ 分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值。

【考点分析】: 多 □ 函数极值 □ 其求法。

【求解过程】:

□ □ 二 □ 函数极值的必要条件, 得 □ 方程组:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = (y + \frac{x^2}{3} + x^2)e^{x+y} = 0 \\ f_y(x, y) = (y + \frac{x^2}{3} + 1)e^{x+y} = 0 \end{cases}$$

求得 □ 点为 $(-1, -\frac{2}{3}), (1, -\frac{4}{3})$ 。

□ □ □ 得极值的充分条件:

$$f_{xx}(x, y) = (2x + 2x^2 + y + \frac{x}{3})e^{x+y}$$

$$f_{xy}(x, y) = (1 + x^2 + y + \frac{x}{3})e^{x+y}$$

$$f_{yy}(x, y) = (1 + 1 + y + \frac{x}{3})e^{x+y}$$

在点 $(-1, -\frac{2}{3})$ 上, $AC - B^2 = -2e^{-\frac{10}{3}} < 0$, 所以函数在此点不 □ 在极值。

在点 $(1, -\frac{4}{3})$ 上, $AC - B^2 = 2e^{-\frac{2}{3}} > 0, A > 0$, 所以函数在此点 □ 得极小值, □ □ 得函数值

为 $-e^{-\frac{1}{3}}$ 。

综上所述, 函数在 $(1, -\frac{4}{3})$ 上 □ 得极小值 $-e^{-\frac{1}{3}}$ 。

【方法总结】：对于多函数极值求法，教材叙述较为详细，同时总结一下容易被同学们忽略的地方：

- 1) 极值问题除了要考察函数的驻点，也要考察一阶导数不存在的点。
- 2) 对于条件极值和拉格朗日乘数法也要熟练掌握。

在同济版高数下册 111 页对于函数极值问题的求法叙述十分详细，读者只要练习题目，这类问题是可以解决的。

(18)(本题 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=1$ ，证明：

- (1) 在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$ 。
- (2) 在 $\eta \in (-1, 1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 。

【考点分析】：中值定理。

【求解过程】：

- (1) 构造函数 $F(x)=f(x)-x$ 。因为 $f(x)$ 是奇函数所以得 $f(0)=0$ ，从而得：

$$F(0)=f(0)-0=0=F(1)=f(1)-1=0$$

由罗尔定理，在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$ 即 $f'(\xi)=1$ ，得证。

- (2) 构造函数 $G(x)=f(x)+f'(x)-x$ 。因为 $f(x)$ 是奇函数得 $f(-1)=-f(1)=-1$ ，可得：

$$\begin{aligned} G(1) &= f(1)+f'(1)-1=f'(1) \\ G(-1) &= f(-1)+f'(-1)-(-1)=f'(-1) \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 为奇函数得 $f(x)=-f(-x)$ ，两边求导得 $f'(x)=f'(-x)$ 也就得知

$$f'(1)=f'(-1) \Rightarrow G(1)=G(-1)$$

由罗尔定理，在 $\xi \in (-1, 1)$ ，使得 $G'(\xi)=f''(\xi)+f'(\xi)-1=0$ 即

在 $\eta \in (-1, 1)$ ，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ ，得证。

【方法总结】：使用罗尔定理证明函数存在性问题，关键在于构造函数，构造函数的方法是求得要证明的函数，有时可要乘以 e^x 等，如第二问中构造函数为 $e^x(f'(x)-1)$ 亦可，这时使用第一问的结论 $(-\xi, \xi)$ 内使用罗尔定理得证。

19.(本题 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点， L 绕 z 轴转一周得曲面 Σ ， Σ 与平面 $z=0, z=$

所围成的区域为 Ω 。

(1) 求曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 。

【考点分析】: 直线 L 绕形成曲面的方程, Ω 的形心。

【求解过程】:

(1) 求得 L 的方向向量为 $\overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 1\}$, 因此直线 L 的方程为:

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t$$

L 绕 z 轴转所得 Σ 的 Σ 转曲面的方程为:

$$\begin{cases} x = \sqrt{(-t)^2 + t^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{(-t)^2 + t^2} \sin \theta \\ z = t \end{cases}$$

去掉 θ 数, 因此 L 绕 z 轴转后得 Σ 的曲面方程为:

$$x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2 \text{ 即 } x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1。$$

(2) 求形心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的关于 $\bar{z}$, 由于 Σ 关于 x, y 对称, 因此形心 $\bar{x}, \bar{y}$ 为 $(0, 0, \bar{z})$ 。

Ω 形心 $\bar{z}$ 公式:

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} = \frac{\int_0^2 z dz \iint_{2z^2-2z+1} dx dy}{\int_0^2 dz \iint_{2z^2-2z+1} dx dy} = \frac{\pi \int_0^2 (2z^3 - 2z^2 + z) dz}{\pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) dz} = \frac{\pi \left(8 - \frac{16}{3} + 2 \right)}{\pi \left(\frac{16}{3} - 4 + 2 \right)} = \frac{\frac{14}{3} \pi}{\frac{10}{3} \pi} = \frac{7}{5}$$

综上, 求 Ω 的形心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 为 $(0, 0, \frac{7}{5})$ 。

【方法总结】: 曲面 Σ 数方程求法是固定的, Ω 方法见同济版高数下册 34 页; 而形心的求法为固定公式, 记 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 并应用即可, Ω 方法见同济版高数下册 170 页关于 Ω 心的求法。

20. (本题 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, a, b 为何值时, C 在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

【考点分析】: 矩阵基本运算, 线性方程组。

(本题有必要说一下, 考生在考第一次见这个题目时, 可能会得是过换这个等式 $AC - CA = B$ 求解, 但做了一部分时, 会发现上本题是解线性方程组的题目, 而方法也是十分简单的设出 C 的四个未知数即可。)

【求解过程】:

设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x \\ x & x \end{pmatrix}$, 过计算 AC, CA 得:

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, CA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{pmatrix}$$

$$AC - CA = \begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \text{问题转化为解线性方程组:}$$

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(此处 $\rightarrow$ 代表 $\square$ 等行 $\square$ 换)

若此线性方程组有解, 那 $\square$ 可知 a, b 分 $\square$ 为 $-1, 0$ 。 $\square \square$,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{解得 } X = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 \\ -k_1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

综上所述 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, (其中 k_1, k_2 为任意常数)。

【方法总结】: 本题是一个线性方程组十分基础的题目, $\square$ 一 $\square$ 在可以 $\square$ 为为 $\square$ 点的 $\square$ 方是, 可 $\square \square \square$ 以 $\square$ 的经 $\square$, 本题并不是一个线性方程组的题目。

21. (本题 $\square$ 分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b \end{pmatrix}$$

【求解过程】:

(1) 明:

$$f = 2(x_1, x_2, x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a \end{pmatrix} (a_1, a_2, a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b \end{pmatrix} (b_1, b_2, b) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= X^T (2\alpha\alpha^T) X + X^T (\beta\beta^T) X = X^T (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) X$$

因此二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 。□ □。

(2) 明: 设 (1) 中矩阵为 A , $A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha$ 求得 A 的一个 □ □ 值 2

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = \beta \text{ 求得 } A \text{ 的一个 □ □ 值为 } 1.$$

在 □ □ □ □ 内必 □ 在一个向量 γ , □ 和 α, β 都正 □。

$$\text{因此 } A\gamma = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\gamma = 0\gamma.$$

因此 f 在正 □ □ 换下的 □ □ 形为 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【方法总结】: 二次型基础题, 熟练 □ □ 基本内容即可。

22. (本题 □ 分 11 分)

$$\text{设 □ □ □ 量 } X \text{ 的 □ □ □ □ 为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 令 □ □ □ 量 } Y = \begin{cases} , & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < , \\ 1, & x \geq \end{cases}$$

(1) 求 Y 的分 □ 函数;

(2) 求 □ □ $P\{X \leq Y\}$.

【考点分析】: 分 □ 函数。

【求解过程】:

$$(1) \text{ □ 求出 } a \text{ 的值: } \int_0^3 \frac{x^2}{a} dx = \int_0^3 \frac{1}{a} d \frac{x^3}{3} = \frac{9}{a} = 1, \text{ 解得 } a = 9.$$

设 Y 的分 □ 函数为 $F_Y(y)$, 可知:

$$y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) = 0;$$

$$1 \leq y < 2 \text{ 时, } F_Y(y) = \int_2^y \frac{x^2}{9} dx + \int_1^y \frac{x^2}{9} dx = \frac{1}{27}(y^3 + 18);$$

$$y \geq 2 \text{ 时, } F_Y(y) = 1$$

综上所述, Y 的分段函数为 $F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{27}(y^3 + 18), & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$ 。

$$(2) \quad \{Y \leq 2\} = \{Y \leq 1\} + \{1 < Y \leq 2\} = \{Y \leq 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9} dy = \frac{8}{27}$$

【方法总结】: 熟练分段函数定义是解决本题的关键。

23.(本题 11 分)

设总体的概率密度函数为 $(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于 0,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的独立样本。

- (1) 求 θ 的矩估计量;
- (2) 求 θ 的最大似然估计量。

【考点分析】: 矩估计和极大似然估计。

【求解过程】:

$$(1) \quad EX = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \theta de^{-\frac{\theta}{x}} = \theta \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\theta}{x}} \right) = \theta$$

因此 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。

$$(2) \quad \text{似然函数} = \frac{\theta^{2n}}{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i}}, \text{ 对似然函数取对数:}$$

$$\ln L = 2n \ln \theta - 3 \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i}$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = 0, \text{ 得 } \theta \text{ 的最大似然估计量 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}。$$

【方法总结】: 矩估计和最大似然估计是常考的内容, 并且解决的方法单一, 一定要对此类题目熟练, 11 分。