2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

□1□□□ $=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ □□□□□□□□□□

□A□0
□B□1
□C□2
□D□3

□2□□□□ $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$ □□□ n □□□□□□ $f'(0)=$

□A□ $(-1)^{n-1}(n-1)!$

□B□ $(-1)^n(n-1)!$

□C□ $(-1)^{n-1}n!$

□D□ $(-1)^n n!$

□3□设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a+\cdots a_n$，　数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分　要条　.　　　　(B)充分　　要条　.

（C）　要　充分条　.　　　　（D）　充分　　要条　.

□4□设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x dx(k=1,2,3)$,　有 D

（A）$I_1<I_2<I_3.$　　　　(B) $I_2<I_2<I_3.$

(C) $I_1<I_3<I_1,$　　　　(D) $I_1<I_2<I_3.$

□5□设函数 $f(x,y)$ 可微，且　　x,y 都 有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$　的一个充分条　是

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2.$　　　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_1.$

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2.$ (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2.$

□6□□□□D□□□ $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ □□□□ $\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=($ $)$

$(A)\pi$ $(B)2$ $(C)-2$ $(D)-\pi$ □7□□ $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \alpha\ =\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}, \alpha\ =\begin{pmatrix}1\\-1\\c\end{pmatrix}, \alpha\ =\begin{pmatrix}-1\\1\\c\end{pmatrix}$ □□

c_1,c_2,c_3,c_4 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ □

□A□ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ □B□ α_1,α_2,α

□C□ $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ □D□ $\alpha_2,\alpha\ ,\alpha$

□8□□ A □3□□□□ P □3□□□□□□□ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ □ $P=\left(\alpha_1,\alpha\ ,\alpha\ \right)$ □

$Q=\left(\alpha_1+\alpha\ ,\alpha\ ,\alpha\ \right)$ □ $Q^{-1}AQ=$ □ □

□A□ $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$ □B□ $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

□C□ $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ □D□ $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

、 **9–14** **4** **24** □□□ .

□9□□ $y=y(x)$ □□□□ $x^2-y+1=e^y$ □□□□□□□□□ $\frac{dy}{dx}=$ ______ □

□10□□□ $\lim\limits_{x\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ______ □

□11□□ $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,□□□□ $f(u)$ □□□□ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______ □

□12□□□□□ $ydx+(x-3y^2)dy=0$ □□□□□□ $y|_{x=1}=1$ □□□______ □

□13□□□ $y=x^2+x(x<0)$ □□□□ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ □□□□□□______ □

□14□□ A □ 3 □□□□ $|A| = 3$, A^* □ A □□□□□□□□□ A □□□□□□□□□□□ □ B ,□ $|BA^*| =$ ________ □

、 **15—23** ， **94** . □□□ . **应 文 说明**、 **证明过 或** .

□15□□□□□□ 10 □□

□□□□ $f(x) = \dfrac{1+x}{\sin x} - \dfrac{1}{x},$ □□ $a = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

□1□□

□ $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ □ $b=\begin{pmatrix} - \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

□□□□ $|A|$

□□□□□□□□□□□ $Ax=b$ □□□□□□□□ a □□□ $Ax=b$ □□□□□

□23□□□□□□ 11 □□□□□□ $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\end{pmatrix}$ □ A^T □□□ A □□□□□□ $r\ A^TA\ =2$ □

□□□□ $f=x^TA^TAx$ □

1□□ a

2□□□

2011 全国硕士研究生入学统一考试

□□□□□□

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

□□□□□ $x\to 0$ □□□□□ $f\ x\ =\ \sin x-\sin\ x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则□

□□

□□已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x\ )}{x}=$ □

□ 0000

□ $f(0)<1, f''(0)>0$ □□ $f(0)<1, f''(0)<0$ □

□□□ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$ 则 I、J、K 的大小关系是 □

□□

□□□ □ □ □ □□□□□□ □ □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□ □ □□□□□□□□□□□□□□

□□□□ $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$ □ □□□

□ P_1P_2 □□□□ $P_1^{-1}P_2$ □□□ P_2P_1 □□□ $P_2^{-1}P_1$ □

□ □ $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ □ □ □□□□ A^* □ □ □□□□□□□□ $(1,0,1,0)$ □□□□ $Ax=0$ □

□□□□□□□□□ $A^*x=0$ □□□□□□□□□

□ α_1,α_3 □□□□□ α_1,α_2 □□□ α_1,α_2,α □□□ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ □

9–14 4 24 □□□ .

□□ $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=$ □

□□□□□□□ $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解 $y=$ □

□□□□□ $y=\int_0^x \tan tdt(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ □□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□ $f(x)=\begin{cases}\lambda^{-},x>0\\0,x\le 0\end{cases},\lambda>0$ □□□ $\int_{-\infty}^{+\infty}x\ \ (x)\ \ x=$ □

□□□□□□□□□□ □□□□□ $x^2+y^2=2y$ □ □ □□□□□□□□□□□□ $\iint\limits_D xyda=$ ________ □

□□□□□□ $(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ □□ □ □□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

15—23 94 . □□□ . 应 文 说明 证明过 或演 .

□□□□□□□ $F(x)=\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ □□ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$ □□□ α □□□□□□□□

□□□□□ □□□□□□□□□□ $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$ □□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□

□□□□

□□□□ $z=f(xy,yg(x))$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□ □□□□□□□□ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}$ □

□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ α □□□□□

□□□□□□□□□□□□□□ $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$ □□ □□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□ $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ □

□□□ $a_{\text{n}}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\text{n}}-\ln n(n=1,2,\ldots)$ □□□ $\{a_n\}$ □□□□□

□□□ □□□□□□□□□□□□□□ □ □□□□□□□□□□□□□□

$x^2+y^2=2y(y\geq\frac{1}{2}),x^2+y^2=1(y\leq\frac{1}{2})$ □□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□

□□

□□□□ gm/s^2 □□□□□□ $10^3kg/m^3$ □□

□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $\iint_D f(x,y)dxdy=a$ □□

□ $D=\{(x,\ \ )|0\leq x\leq 1,0\leq\ \ \leq 1\}$ □□□□□□□□ $I=\iint_D xy\int_{xy}''(x,y)dxdy$ □□

□□□□ □□□□□□□□ $R(A)=2$ □□ $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$ □

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

1【答案】: C

【解析】: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$ □□□ $x=1$ □□□□□

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1\text{□□□ }y=1\text{ □□□□□□□□□□□□□ □□□□}C$$

2

【答案】: C

【解析】:

$$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$$

□ □ $f^{'}(0)=(-1)^{n-1}n!$

3【答案】: (A)

【解析】: 由于$a_n>0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，S_n=a +a +⋯a_n为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的前n项和。正项级数前n项和有界与正向级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛是充要条件。故选 A

4【答案】: (D)

【解析】: ：$_k=\int_e^k {}^{x^2}\sin$ 看为以k为自变量的函数，则可知$I_k{}'=e^{k^2}\sin k\geq 0, k\in(0,\pi)$，即可知$_k=\int_e^k {}^{x^2}\sin$ 关于k在$(0,\pi)$上为单调增函数，又由于$1,2,3\in(0,\pi)$，则$I_1<I_2<I_3$，故选 D

5【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$表示函数$f(x,y)$关于变量$x$是单调递增的，关于变量$y$是单调递减的。因此，当$x_1<x_2,y_1>y_2$必有$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D

6【答案】: □D□

【解析】: □□□□□□□□□□□□□□

$$\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}\left(x^5y-1\right)dy=-\pi$$

7【答案】: □C□

【解析】: □□$\left|\left(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$□□□$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$□□□□□□

□□C□

8【答案】: □B□

【解析】：$Q = P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$□□$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$□

□

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

□□□B□□

9【答案】：$\dfrac{2x}{{}^{y}+1}$

【解析】：□□ $x^2-y+1=e^y$ □□□ x □□□□ $2x-\dfrac{dy}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}$ □□□

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{e^y+1}$$

10【答案】：$\dfrac{\pi}{4}$

【解析】：□□$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}.$

11【答案】：0．

【解析】：□□$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$□□□$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

12【答案】：$x=\ {}^{2}$

【解析】：$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=3y-\dfrac{1}{y}x\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y}x=3y$ □□□

□□□□□□□□□

$$\mathrm{x}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3\mathrm{y}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}dy}\mathrm{dy}+\mathrm{C}\right]=\frac{1}{\mathrm{y}}\left[\int 3\mathrm{y}^2\mathrm{dy}+\mathrm{C}\right]=(\ {}^{3}+C)\frac{1}{\ }$$

□□□$y=1$□$x=1$□□□$C=0$□□$x=\ {}^{2}.$

13【答案】：$(-1,0)$

【解析】：将 $'=2x+1,\ ''=2$ □□□□□□□□□□□

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ □

□□□ $(2x+1)^2=1$ □□□ $x=0$ 或 -1 □□ $x<0$ □□□ $x=-1$ □▫□ $y=0$ □□

□□□□□□ $(-1,0)$

14【答案】：**-27**

【解析】：□□ $B= \ _{12}A$ □□ $BA^*=E\ \ A\cdot A^*=|A|E\ \ =3E$ □

□□□ $|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$

15 **【解析】**：（1）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x}+1=1$ □▫ $a=1$

□2□,□ $x\to0$ □□□ $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

□□□,□ $x\to0$ □□ $x-\sin x$ □ $\frac{1}{6}x^3$ ▫▫□□ $(x)-a\sim\frac{1}{6}x$ □▫ $k=1$

16【解析】：$f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ □

▫□□□□□□. $f_x'(x,y)=e-x=0, f_y'(x,y)=-y=0$ □□□□□□□□□□ $(e,0)$.

□ $A=f_{xx}'(e,0)=-1,B=f_{xy}'(e,0)=0,C=f_{yy}'(e,0)=-1$，

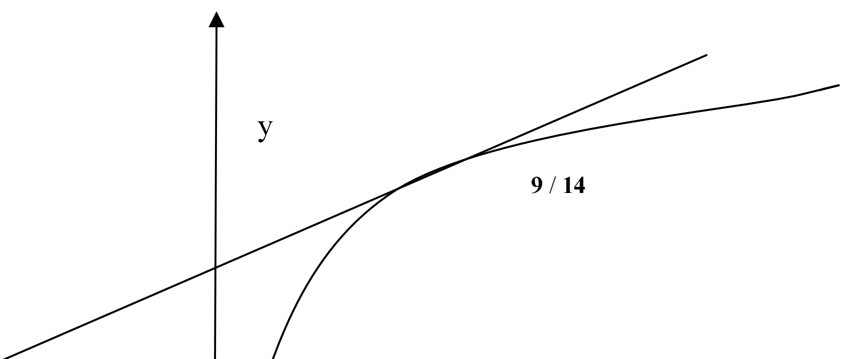
□□ $B^2-AC<0,A<0$ □□ $f(x,y)$ □□ $(e,0)$ □□□□▫□ $f(e,0)=\frac{1}{2}e^2$.

17【解析】：

□□□□□□ $A(x_0,\ln x_0)$ □□□□ $\frac{1}{x_0}$ □□□□□□□□□□ $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ □□□

□□□□□ $B(0,1)$ □□□ $x_0=e$ □□□□□□□□□ $y=\frac{1}{e^2}x+1$

□□□ x □□□□□ $B(-e^2,0)$



□1□ $A=\int_0^2\left[\;^{y}-\;^{2}(y-1)\right]\,y=\left[\;^{y}-\;^{2}(\frac{1}{2}y^2-y)\right]_0^2=\;^{2}-1$

□2□

$$\frac{1}{3}\pi\;2^2\quad{}^2\;\left(\quad{}^2\right)\quad\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x\;x$$

$$\frac{8}{3}\;{}^2\qquad\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}\quad\int_1^{e^2}2\ln x\;x$$

$$\frac{8}{3}\;{}^2\qquad 4\;{}^2\quad\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}\quad\int_1^{e^2}2\;x$$

$$\frac{8}{3}\;{}^2\;\;2\;\left(\;{}^2\;\;1\right)\;\frac{2}{3}\;\left(\;{}^2\;\;3\right)$$

$y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

□ $y''=0$ □ $x=0$ □□□□□ $x=0$ □ $y''=0$ □□□□□□□□□□ y'' □ $x>0$ □ $x<0$ □ □□□□

□ $x>0$ □ □ $2x>0,2\left(1+2x\ \right)\ ^2\int_0\ ^{-t^2}\ t>0$ □ □ □ $y''>0$ □ □ $x<0$ □ □ $2x<0,2\left(1+2x\ \right)\ ^2\int_0\ ^{-t^2}\ t<0$ □□□ $y''<0$ □□□ $x=0$ □ $y''=0$ □□□□□

□□□□□□□□□□□□ $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ □ $x=0$ □□□□□□□□□□□□□□□ $(0,0)$ □□□□ $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ □□□□□□

20【解析】: □ $\ (x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$ □□□

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x
\end{aligned}
$$

□ $0<x<1$ □□□ $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$ □ $\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$ □□□ $\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x\geq 0$ □

□ $\ '(x)\geq 0$ □□ $f(0)=0$ □□□ $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

□□ $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$ □

□ $-1<x<0$ □□ $\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$ □ $\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$ □□□ $\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x\leq 0$ □

□ $\ '(x)\geq 0$ □□□ $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

□□□ $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

21【解析】: **(1)** □□□□□□□ $\ (x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ □□ $f(1)>0$ □□□

$(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$ □□，□□□□□$(\frac{1}{2},1)$，□□□x_0□，□□□□□□，

□，□□□x_1□□□$x_0^n+x_0^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1$□□，，，□□$x_1=x_0$□

，，□□□□

□ 2 □ ， □ □ □ x_n □ ， $f(x_n)=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$ □ □ □

$(x_n)=\dfrac{x_n(\ -x_n^n)}{-x_n}-\ =\ (\frac{}{2}<x_n<\ )$□

□ □ $x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$ □ □ □ $x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$ □ □ □

$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$ □□□$x_{n+1}<x_n$ □□□□$\frac{1}{2}<x_n<1$□，，$\{x_n\}$□□，□□□

□□，□，□□□□□□□$\{x_n\}$□□□，□$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ □□□$a<x_2<x_1=1$□

□$n\to\infty$□□$\lim\limits_{n\to\infty}\ (x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a_n}-1=0$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

22【解析】□□□□ $\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

□□□ $\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

□□□□，□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$1-a^4=0$□$-a-a^2=0$□□□$a=-1$□

□□□□□□□□□□，，□□□ $\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ □，□，□□□，，，□

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□□□□□□□□□□□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □□□□□□□□□□ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ □□□□□□ $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

□□□□□ $Ax=b$ □□ 2 □□ □□□□□ $|A|=0$.

□□ $|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ □□ $\lambda=1$ □□□□

□ $\lambda=1$ □□□ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □□□□□□□ $\lambda=-1$ □

23【解析】: 1□□ $r(A^TA)=r(A)=2$ □□□

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

2□ $f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=2x_1{}^2+2x_2{}^2+4x_3{}^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

□□□ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

□□ B □□□□□□□□ $\lambda_1=0;\lambda\ =2;\lambda\ =6$

□□$\lambda_1 = 0,\quad (\lambda_1 E - B)X = 0$□□□□□□□□□□□$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

□□$\lambda_2 = 2,\quad (\lambda_2 E - B)X = 0$□□□□□□□□□□□$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

□□$\lambda_3 = 6$,解$(\lambda_3 E - B)X = 0$□□□□□□□□□□□$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□η_1, η_2, η □□□□□□

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$□$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$□$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Q = (\alpha_1, \alpha\ , \alpha\ )$