

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出四个选项，只有一项符合题目要求，将所选项前的字母填在答案卷上。

(1) 设 $\lim a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ()

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

(2) 下列函数中有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3) 设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,

则下列选项中正确的是

(A) $a = 0$

(B) $b = 1$

(C) $c = 0$

(D) $d = \frac{1}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ()

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当

(D) 当 $f'(x) \leq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

$$(5) \quad \text{列} \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad-bc)$

(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$

(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_2, \alpha_2 + l\alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的关系是

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 非充分 非必要条件

(7) 设 $A \subset B$ 成立, 且 $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$, 求 $P(B-A) = (\quad)$

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.3

(D) 0.4

(8) 设 X_1, X_2, X_3 来自 $N(0, \sigma^2)$ 的独立样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 的分布

(A) $F(1, 1)$

(B) $F(2, 1)$

(C) $t(1)$

(D) $t(2)$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设某商品的需求函数 $Q = 40 - 2P$ (P 商品价格), 则该商品的边际收益 _____。

(10) 设 D 是由 $xy + 1 = 0$ 与 $y + x = 0, y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积 _____。

(11) 设 $\int_0^a x e^{-x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____。

(12) 二次 分 $\int_0^1 dy \int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}) dx =$ _____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2x_3$ 的 指数 1, 则 a 的 范 是_____

(14) 设 X 的概率密度 $(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2} & \theta < x < 2\theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数,

$X_1, X_2, \dots, X_n$, 来自 X 的 本, $c \sum_{i=1}^n x_i^2$ 是 θ^2 的 偏估计, 则 $c =$ _____

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题 分 10 分)

求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$

(16) (本题 分 10 分)

设平面区 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

(17) (本题 分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(e^x + \cos y)^2$,

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达。

(18) (本题 分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛 和函数。

(19) (本题 分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$

(20) (本题 分 11 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 3 位矩阵。

①求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系; ②求 足 $AB = E$ 的所有矩阵 B

(21) (本题 分 11 分) 证明 n 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$ 似。

(22) (本题 分 11 分)

设 变量 X 的概率分 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条 下, 变量 Y

匀分 $U(0,i)(i=1,2)$

(1) 求 Y 的分 函数 $F_Y(y)$

(2) 求 EY

(23) (本题 分 11 分)

设 变量 X 与 Y 的概率分 同, X 的概率分 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}, P\{X=1\}=\frac{2}{3}$, 且 X 与

Y 的 关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$

(1) 求 (X, Y) 的概率分

(2) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) A

(2) C

(3) D

(4) C

(5) B

(6) A

(7) (B)

(8) (C)

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\frac{dR}{dp} = 40 - 4p$

(10) $\frac{-\ln 2}{2}$

(11) $= \frac{1}{2}$

(12) $\frac{1}{2}(e-1)$

(13) $[-2, 2]$

(14) $\frac{2}{5n}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 【答案】

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1) \int_1^x t^2 dt - \int_1^x t dt}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e - 1) - x$$

$$\text{令 } u = \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e - 1) - x$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}$$

(16) 【答案】

$$\int_0^\pi d\theta \int_1^\pi \frac{\rho \cos \theta \sin \pi \rho}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta} \rho d\rho$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \int_1^\pi \rho \sin \pi \rho d\rho$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \int_1^\pi \rho d \cos \pi \rho$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta (\rho \cos \pi \rho \Big|_1^\pi - \frac{1}{\pi} \int_1^\pi \cos \pi \rho d\pi \rho)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \cdot (2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(17) 【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x} = f'(e^x \cos y) e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) e^x \cos y$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = f'(e^x \cos y) e^x (-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \sin^2 y + f'(e^x \cos y) e^x (-\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} = (4E + e^x \cos y) e^{2x}$$

$$f''(e^x \cos y) = 4f(e^x \cos y) + e^x \cos y$$

$$\text{令 } e^x \cos y = u,$$

$$\text{则 } f''(u) = 4f(u) + u,$$

$$\text{故 } f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4} \quad C_1, C_2 \text{ 为任意常数}$$

$$\text{由 } f(0) = 0, f'(0) = 0, \text{ 得}$$

$$f(u) = \frac{e^{2u}}{16} - \frac{e^{-2u}}{16} - \frac{u}{4}$$

(18) 【答案】

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1, \text{ 得 } R = 1$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3) \quad , \text{ 当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3) \quad ,$$

故收敛 $(-1, 1)$ 。

$x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x (n+1)x^n dx \right)' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+2} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)x^{n+2} dx \right)' \right)' = \left(\frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} \right)' \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' \right)' = \left(\frac{x-2x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{-x}{(1-x)^3} = s(x) \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ 时, } s(x) = 3, \text{ 故和函数 } s(x) = \frac{3-x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1)$$

(19) 【答案】

$$\text{证明: 1) } 0 \leq g(x) \leq 1, \text{ 所有定分比定理知, } \int_a^x 0 dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt,$$

$$0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a.$$

2) 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^{x+\int_a^x g(t)dt} f(t)dt$$

$$F(a) = 0$$

$$F'(x) = f(x)g(x) - f[a + \int_a^x g(t)dt]g(x)$$

$$= g(x)\{f(x) - f[a + \int_a^x g(t)dt]\}$$

由 1) 知 $\int_a^x g(t)dt \leq x - a$,

所 $a + \int_a^x g(t)dt \leq x$ 。

由 $f(x)$ 是调增, 知

$$f(x) - f[a + \int_a^x g(t)dt] \geq 0$$

由 $0 \leq g(x) \leq 1$, 所 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 调增, 所 $F(b) > F(a) = 0$, 得证。

$$(20) \text{ 【答案】 } ①(-1, 2, 1)^T \quad ② B = \begin{pmatrix} -k_1+2 & -k_2+6 & -k-1 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k+1 \\ k_1 & k_2 & k \end{pmatrix} (k_1, k_2, k \in R)$$

(21) 【答案】 似对 的充要条 证明。

$$(22) \text{ 【答案】 } (1) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) \frac{3}{4}$$

(23) 【答案】 (1)

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$(2) \frac{4}{9}$$